Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Часть I.

Введение.

Глава первая.

Поле

Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Серго Орджоникидзе

(МГРИ)

Л. М. АЛЬПИН, Д. С. ДАЕВ, А. Д. КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

Было допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»

Часть I.

Введение.

Глава первая.

Поле

УДК 550.83.01(0.75)

Альпин Л. М., **Даев Д. С., Каринский А. Д.** Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1985. – 407 с.

Изложена теория полей: гравитационного; электростатического и магнитостатического в вакууме и в поляризующейся (намагничивающейся) среде; стационарных электрического и магнитного; переменного электромагнитного; рассмотрены элементы теории упругости; распространение электромагнитных и упругих колебаний в среде; способы расчёта полей и их зависимости от среды.

Для студентов геофизических специальностей геологоразведочных вузов и факультетов.

Р е ц е н з е н т ы:
1. Кафедра геофизики МГУ.
2. Д-р техн. наук *Б. С. Светов (ИЗМИРАН).*

Часть I. ***Введение.*** Глава первая. ***Поле.***

2019,. 104 с.

Учебник "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике", отражавший, в то время, взгляды научной школы геофизического факультета МГРИ, был выпущен издательством "Недра" в 1985 году.

По мнению одного из авторов подготовка в настоящее время электронной версии Учебника даёт возможность дополнить книгу несколькими важными, особенно для студентов, разделами и значительно увеличить число иллюстраций. Есть надежда, что удастся подготовить в виде отдельных pdf – файлов следующие пять частей электронной версии Учебника. Часть I: "Введение. Поле"; часть II: "Статические поля в вакууме и в присутствии среды"; часть III: "Стационарные электрическое и магнитное поля"; часть IV: "Переменное электромагнитное поле"; часть V: "Элементы теории упругости и теории распространения упругих колебаний".

В этой, электронной версии Учебника представлена часть I: разделы "Введение" и Глава первая. "Поле".

Иллюстраций 39, список литературы – 24 названия.

Электронная версия части I Учебника подготовлена А. Д. Каринским

Москва, 2019 г.

Оглавление

Предисловие

Курс «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике» для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», является связующим звеном между общетеоретическими дисциплинами – физикой и математикой и специальными предметами – гравиразведкой, магниторазведкой, электроразведкой, сейсморазведкой и каротажем. Главное содержание курса составляет рассмотрение общих физико-математических закономерностей полей разной физической природы, изучение связей между причинами, порождающими поле, и величинами, характеризующими его, изучение основ построения теории полей. Данный курс является основой для более детального и глубокого изучения теории отдельных методов геофизической разведки.

От книги Л. М. Альпина «Теория поля», изданной в 1966 году, настоящий учебник отличается наличием глав, посвященных теории упругости и распространению упругих колебаний; значительно расширены разделы, посвященные переменному электромагнитному полю; иначе изложены вопросы, касающиеся возбудителей поля, его геометрии, пространственных производных, магнитного поля постоянного тока. Некоторые особенности изложения связаны с переходом от системы СГС к международной системе СИ. В книге рассмотрены закономерности поля, создаваемого магнитными массами. Для магнитной массы, рассматриваемой как физически фиктивное, но удобное понятие, вводится внесистемная единица.

В отличие от вышедшего в 1979 году второго издания учебника «Теория поля» И. К. Овчинникова в данной книге уделяется значительно больше внимания вопросам обоснования единственности решения прямой задачи, совместно рассматриваются закономерности гравитационного, электростатического и магнитостатического полей, подробнее написаны разделы, посвященные распространению упругих колебаний.

В данной книге в ссылках опускается номер главы, когда идет речь о параграфах той же главы, а также номер параграфа, когда имеется в виду раздел того же параграфа. В ряде случаев под одним номером даётся группа формул. При ссылках на ту или иную из них *номер группы дополняется нижним индексом* - номером формулы в группе.

Первые пять глав написаны Л. М. Альпиным, шестая – Л. М. Альпиным и А. Д. Каринским, раздел "Введение" и глава седьмая – А. Д. Каринским, главы восьмая и девятая – Д. С. Даевым.

Дополненная и исправленная электронная версия Учебника подготовлена А. Д. Каринским. Бесценную помощь в "распознавании" и преобразовании (с не очень значительными "потерями") в doc - файл текстовой части Учебника оказал К. В. Новиков. Без этой помощи попытка подготовки электронной версии Учебника была бы, наверное, безнадёжной... .

Список обозначений к введению и главе первой

$\mathbf{1}_l$, $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_1$,...- безразмерные единичные векторы (орты) по направлениям l, X, l_1...;

a- точка наблюдения;

A- векторный потенциал;

$\mathbf{dl} = \mathbf{1}_l \cdot dl$- ориентированный элементарный отрезок длиной dl;

$\mathbf{dS} = \mathbf{1}_n \cdot dS$- ориентированная элементарная площадка с нормалью n и площадью dS;

dV- элементарный объём (элемент области V пространства);

$\mathcal{E}$ - напряжение векторного поля;

g^M- точки обрыва векторных линий l_M;

h- коэффициент Ламэ, высота, толщина;

I- электрический ток;

l- линия, длина;

l_M- векторная линия поля **M**;

$l[S]$- замкнутая линия (контур), ограничивающая поверхность S;

L, $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{qa}$ - радиус-векторы с равными расстояниям абсолютными величинами L, L_{12}, L_{qa};

L^M - линии обрыва поверхностей S_M;

M- векторное поле, вектор;

M- абсолютная величина вектора **M**;

M_l, M_x, M_1,...- скалярные компоненты векторов **M** по направлениям l, X, l_1,...;

$\mathbf{M}_l = \mathbf{1}_l \cdot M_l$, $\mathbf{M}_x = \mathbf{1}_x \cdot M_x$, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{1}_1 \cdot M_1$,...- векторные компоненты векторов **M** по направлениям l, X, l_1...;

n- нормаль к поверхности;

$\mathbf{n} = \mathbf{1}_n$- безразмерный единичный вектор по направлению нормали n;

O- точка, центр, начало координат;

p- точка на поверхности S;

q- точка (в частности, в источнике поля);

r- цилиндрическая координата;

R- сферическая координата, сопротивление;

S- поверхность, площадь;

$S[V]$- замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства V;

S_M- поверхности, ортогональные векторным линиям l_M;

t- тангенциальное (касательное к поверхности) направление, время;

$\mathbf{t} = \mathbf{1}_t$- безразмерный единичный вектор по направлению t;

T- скалярное поле, скалярная величина, период;

U- (скалярный) потенциал;

V- область пространства, объём;

x, y, z- декартовы координаты;

X, Y, Z- оси координат;

θ (тета)- сферическая координата;

Θ (тета прописн***а***я)- область пространства;
Λ (лямбда прописн***а***я)- скалярное поле, параметр среды;
ξ (кси)- координата в произвольной системе координат;
π (пи)$\approx$3.1415926535897932384626433832795028841971693993751...;
τ (тау)- тангенциальное (касательное к поверхности) направление;
$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{1}_{\tau}$- безразмерный единичный вектор по направлению τ;
φ (фи)- цилиндрическая или сферическая (азимутальная) координата;
Φ (фи прописн***а***я)- скалярное поле;
ψ (пси)- поток вектора;
ω (омега)- угол видимости;
Ω (омега прописн***а***я)- телесный угол;
П- плоскость;
Ц- циркуляция, цилиндр.

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от студентов специалисты - геофизики, наверное, ничего не потеряют, пропустив этот раздел и перейдя к главе первой.

в.1. Скалярные и векторные величины

Скалярную величину (скаляр) T характеризует число, а также - размерность (если T - не безразмерная величина). Примеры скалярных величин – масса m (кг), заряд e (Кул), напряжение $\mathcal{E}$ (В) электрического поля, ток I (А) в цепи электрического тока и её сопротивление R (Ом). *Действия сложения и вычитания применимы к скалярным величинам только в том случае, если они имеют одинаковую размерность. При перемножении или делении таких величин тем же действиям подвергаются их размерности*. Например, по закону Ома для участка цепи электрического тока отношение $\mathcal{E}(\text{В})/R\ (\text{Ом}) = I\ (\text{В/Ом}) = I\ (\text{А})$.

Векторную величину **M** характеризуют абсолютная величина $|\mathbf{M}| = M$ и направление вектора **M**. При "геометрическом изображении" такой величины её удобно представить направленным отрезком. Пример векторной величины - сила **F** (Н).

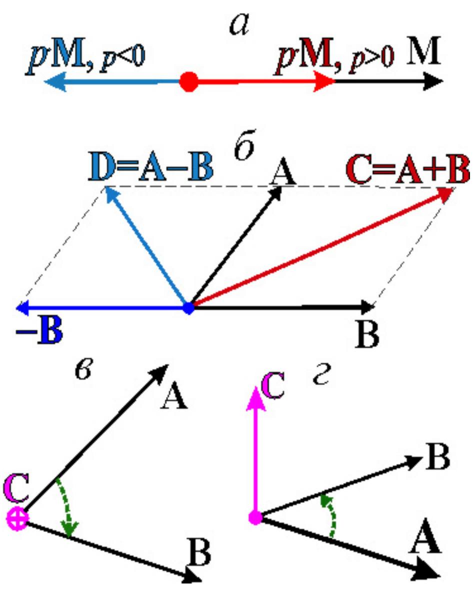


Рис. В.1.
Произведение $p{\cdot}\mathbf{M}$ скаляра p и вектора **M** (*а*); сложение и вычитание векторов (*б*); векторное произведение **C** векторов **A**, **B** (*в*, *г*)

При умножении вектора **M** на скалярную величину p (или при делении **M** на скалярную величину s) получаем вектор $p{\cdot}\mathbf{M}$ (или $\mathbf{M}/s$), где абсолютная величина вектора $p{\cdot}\mathbf{M}$ равна $|p|{\cdot}M$ (или $M/|s|$), а направление вектора $p{\cdot}\mathbf{M}$ (или $\mathbf{M}/s$) совпадает с направлением **M** при $p>0$ (или $s>0$), либо направление вектора $p{\cdot}\mathbf{M}$ (или $\mathbf{M}/s$) противоположно направлению **M** при $p<0$ (или $s<0$) (рис. В.1, *а*). При умножении вектора **M** на скаляр p ($p{\cdot}\mathbf{M}$), или делении **M** на скаляр s ($\mathbf{M}/s$) тем же действиям подвергаются размерности вектора **M** и скаляров p или s. Например, если **F** – сила, действующая на массу m, а **a** – ускорение, то по 2-му закону Ньютона $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, где размерности: $[F] = \text{Н}$, $[m] = \textit{кг}$, $[a] = \text{Н}/\textit{кг} = \text{м/с}^2$.

Действие сложения ($\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$) применимо к векторным величинам только в том случае, если векторы имеют одинаковую размерность, а "геометрическая иллюстрация" такому действию - "правило параллелограмма". При вычитании векторов студентам можно вспомнить, что векторы **B** и **–B** имеют одинаковую абсолютную величину и противоположное направление, то есть $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\mathbf{D}$ (рис. В.1, *б*).

Есть два вида умножения (произведения) двух векторов.

1). Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(\mathbf{A}\ \mathbf{B})=A\cdot B\cdot\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})=p. \qquad (в.1)$$

В соответствии с выражением (в.1) скалярное произведение (**A B**) векторов **A**, **B** это – скалярная величина (скаляр p), равная произведению модулей (абсолютных величин) A, B этих векторов на косинус угла между направлениями этих векторов. Знак скалярного произведения векторов – тот же, что знак косинуса угла между направлениями векторов **A**, **B**. То есть скалярное произведение p векторов **A**, **B** в зависимости от угла между направлениями векторов **A**, **B** может быть положительным, отрицательным, или равным нулю. Понятно, что это произведение $p=0$, если угол между направлениями векторов **A**, **B** равен $\pi/2$ рад (90^o).

2). Векторное произведение двух векторов это вектор:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]=\mathbf{C}. \qquad (в.2)$$

Абсолютная величина вектора $|\mathbf{C}|=C=A\cdot B\cdot\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})$, а направление **C** определяет следующее: $\mathbf{C}\perp\mathbf{A}$, $\mathbf{C}\perp\mathbf{B}$, и векторы **A**, **B**, **C** образуют правую тройку. Последнее означает, что если вектор **A** "мысленно повернуть" на наименьший угол (между направлениями **A**, **B**) в направлении вектора **B**, то направление вектора **C** определит "правило правого винта" (рис. В.1, *в*, *г*). На рис. В.1, *в* векторы **A**, **B** лежат в плоскости рисунка, а вектор **C** ортогонален этой плоскости и направлен "от нас". На рис. В.1, *г* сделана попытка проиллюстрировать равенство (в.2) "объёмным изображением".

В соответствии с выражением (в.2) векторное произведение **C** векторов **A**, **B** это – вектор, который равен нулю, если векторы **A**, **B** – коллинеарны (взаимно параллельны ($\mathbf{A}\,||\,\mathbf{B}$), либо антипараллельны ($\mathbf{A}\uparrow\downarrow\mathbf{B}$)).

Такое действие, как *деление* (*чего-либо*) *на векторы* **A**, **B**, ... не имеет смысла, или, по крайней мере, не определен***о***... .

в.2. Скалярная и векторная компоненты вектора

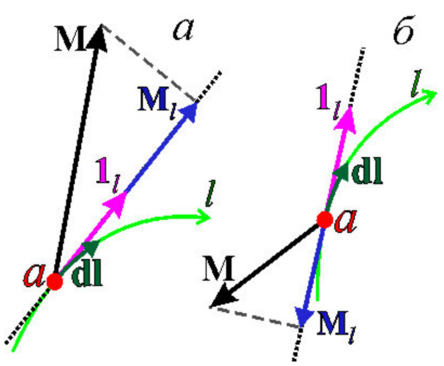


Рис. В.2.
Векторная компонента $\mathbf{M}_l$ вектора **M** по направлению (линии) l и единичный вектор $\mathbf{1}_l$, касательный к l

Вектор **M** можно охарактеризовать не только его абсолютной величиной $|\mathbf{M}|=M$ и направлением, но и тремя скалярными величинами – скалярными компонентами M_1, M_2, M_3 вектора **M** в системе координат (см. ниже). Вспомним такие понятия, как векторная ($\mathbf{M}_l$) и скалярная (M_l) компоненты вектора **M** по направлению (по линии) l. На рис. В.2, *а* показаны: вектор **M** в точке a, проходящая через эту точку линия l, векторная компонента $\mathbf{M}_l$ по направлению l и (пунктирной линией) – касательная к линии l в точке a прямая.

Безразмерный единичный вектор $\mathbf{1}_l$ в точке a линии l направлен по касательной к линии l. Абсолютная величина безразмерного вектора $\mathbf{1}_l$: $|\mathbf{1}_l|=1$. Компоненты M_l и $\mathbf{M}_l$ определяют выражения:

$$M_l = M\cdot\cos(\mathbf{M}, \mathbf{1}_l) = (\mathbf{M}\ \mathbf{1}_l), \quad \mathbf{M}_l = \mathbf{1}_l \cdot M_l, \tag{в.3}$$

где, в соответствии с (в.1), $(\mathbf{M}\ \mathbf{1}_l)$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{1}_l$.

Из выражения (в.3) следует, что при остром или равном нулю угле между направлениями $\mathbf{M}$ и $\mathbf{1}_l$ скалярная компонента $M_l > 0$, а при тупом (или равном π рад) угле между направлениями $\mathbf{M}$ и $\mathbf{1}_l$ компонента $M_l < 0$. Если направления векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{1}_l$ – взаимно ортогональны ($\mathbf{M} \perp \mathbf{1}_l$), то компонента $M_l = 0$.

При $M_l > 0$ направление векторной компоненты $\mathbf{M}_l$ совпадает с направлением $\mathbf{1}_l$ (рис. В.2, *а*), а при $M_l < 0$ имеем: $\mathbf{M}_l \uparrow\downarrow \mathbf{1}_l$, то есть векторная компонента $\mathbf{M}_l$ имеет направление, противоположное направлению $\mathbf{1}_l$ (рис. В.2, *б*). Согласно (в.3) отношения $\mathbf{M}_l / M_l = \mathbf{1}_l$, $\mathbf{M}/M = \mathbf{1}_M$, где $\mathbf{1}_M$ – безразмерный единичный вектор по направлению вектора $\mathbf{M}$.

Понятно, что (по всем направлениям l) *компоненты* M_l одного и того же вектора $\mathbf{M}$ *имеют одинаковую размерность*.

в.3. О скалярных и векторных полях

Подробнее эти вопросы будут рассмотрены ниже, в § 1 главы первой, а здесь, предварительно, отметим следующее.

Понятию "поле" будем придавать как *физический*, так и *математический* смысл. В первом случае можем, например, говорить о том, что электрический заряд создаёт электрическое поле с напряжённостью $\mathbf{E}$. Математически определим понятие "поле" следующим образом. Величина $\mathcal{F}$ образует в области пространства V поле, если каждой точке a области V соответствует некоторое значение $\mathcal{F}$. Иными словами, величина $\mathcal{F}$ есть функция положения точки a в области V: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$. Замкнутую поверхность, ограничивающую область пространства V, будем обозначать $S[V]$ (рис. В.3).

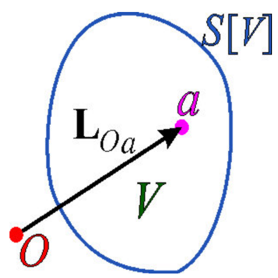


Рис. В.3. Точка наблюдения a в области V, граница $S[V]$ области V и радиус-вектор $\mathbf{L}_{Oa}$

Точку a, в которой мы рассматриваем или определяем поле, условно назовём "*точкой наблюдения*". Положение точки a в области пространства V будем определять двумя способами.

1). При помощи радиус-вектора $\mathbf{L}_{Oa}$ с началом в некоторой ("фиксированной") точке O и концом в точке a (рис. В.3). Абсолютная величина этого вектора $|\mathbf{L}_{Oa}| = L_{Oa}$, где L_{Oa} – расстояние между точками O и a.

2). При помощи координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 в той или иной системе координат.

В общем случае поле $\mathcal{F}$ зависит не только от положения точки a, но и от времени t: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, t)$. Тогда поле $\mathcal{F}$ – *п е р е м е н н о е*. Если поле $\mathcal{F}$ не зависит от времени t ($\mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$, частная производная $\partial\mathcal{F}/\partial t \equiv 0$), то это – *п о с т о я н н о е* поле $\mathcal{F}$. Если (постоянное или переменное) поле $\mathcal{F}$ не зависит от положения точки a в области пространства V, то это – *о д н о р о д н о е* поле в этой области. Тогда в области V имеем: $\partial\mathcal{F}/\partial\xi_1 = 0$, $\partial\mathcal{F}/\partial\xi_2 = 0$, $\partial\mathcal{F}/\partial\xi_3 = 0$, где $\xi_{1,2,3}$ – координаты.

Различают *скалярные*, *векторные* и *тензорные* поля.

1). ***Скалярное поле*** $T(a)$ в каждой точке a характеризует скалярная величина T, то есть число (а также размерность в системе физических единиц). Примеры таких полей: температура t° (в градусах Цельсия, или в других градусах), объёмная плотность масс δ (в кг/м^3), потенциал U электрического поля **E** (в В (вольтах)). Распределение скалярного поля T в пространстве можно представить при помощи уровенных поверхностей $T = \text{const}$. Их сечение другой поверхностью S (плоскостью чертежа, поверхностью Земли) даёт изолинии $T = \text{const}$ скалярного поля T на поверхности S (рис. В.4, *а*). В некоторых случаях оказывается удобнее наглядно показать распределение поля T на поверхности S при помощи чисел в точках, расположенных на S (рис. В.4, *б*).

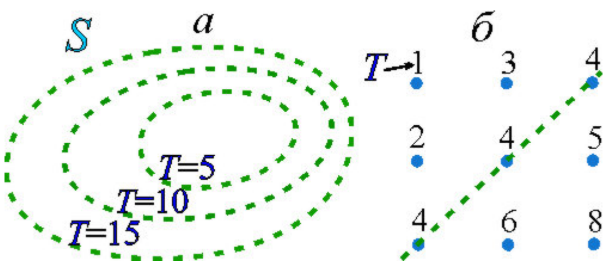


Рис. В.4.
Представление скалярного поля T на поверхности S (или на части S плоскости) при помощи: изолиний (*а*), чисел в "узлах сетки" (*б*)

2). ***Векторное поле*** $\mathbf{M}(a)$ в каждой точке a характеризует вектор **M**. Примеры векторных полей: напряжённости гравитационного (**G**), электрического (**E**), магнитного (**H**) полей. Понятно, что, как и векторную величину **M**, векторное поле $\mathbf{M}(a)$ в каждой точке a пространства (в области V) характеризуют абсолютная величина $|\mathbf{M}(a)| = M(a)$ и направление вектора $\mathbf{M}(a)$, либо три скалярных поля – скалярные компоненты $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_3(a)$ поля $\mathbf{M}(a)$ в системе координат. Для наглядного представления некоторых особенностей того или иного векторного поля **M** удобно воспользоваться таким понятием, как *векторные линии* l_M поля **M** (рис. В.5, *а*). Векторы **M** направлены по касательным к линиям l_M, а "густота" этих линий (в некоторой степени) отражает абсолютные величины M векторов **M**.

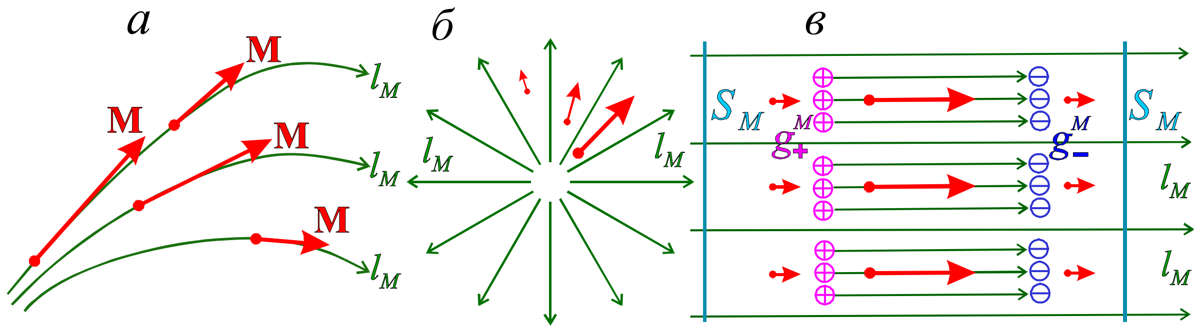


Рис. В.5.
Векторные линии l_M поля **M** (*а*); изменение "густоты" линий l_M: только за счёт "веерообразности" l_M (*б*), только за счёт обрыва l_M (*в*).
На рис. "*в*" показаны: сечение плоскостью рисунка ортогональных линиям l_M поверхностей S_M и точки обрыва $g^M{}_+$, $g^M{}_-$ линий l_M

Если **M** – "силовое" поле (поле сил), то линии l_M называют *силовыми линиями*. В некоторых других случаях линии l_M называют *токовыми линиями* (см. замечание 7 раздела III § 1 главы первой и главу четвёртую).

Изменение "густоты" линий l_M, отражающее изменение абсолютных величин M векторов **M**, может происходить из-за "веерообразности" (геометрического расхождения) линий l_M (рис. В.5, *б*), из-за обрыва линий l_M в некоторых точках $g^M{}_+$, $g^M{}_-$ (рис. В.5, *в*), либо вследствие двух этих явлений.

3). ***Тензорное поле*** в каждой точке a характеризуют тензоры. Тензор (истинный тензор 2-го ранга) в общем случае определяют 9 скалярных величин в системе координат. С тензорами мы "встретимся" в главах четвёртой и восьмой этой книги. Там и определим это понятие. Примерами тензорных полей являются параметры анизотропных сред (§ 3 главы четвёртой), упругие напряжения и упругие деформации (глава восьмая).

Есть и другие "классификации" полей. Это, например, классификация полей по их физической природе. Различают также такие векторные поля, как потенциальные, вихревые, чисто-вихревые (соленоидальные). Но дать определения таким полям мы сможем после того, как рассмотрим вопросы, связанные с пространственными производными векторных полей.

в.4. О системах координат и коэффициентах Ламэ

Подробнее эти вопросы будут рассмотрены ниже, в § 1 главы первой, а здесь, предварительно, отметим следующее.

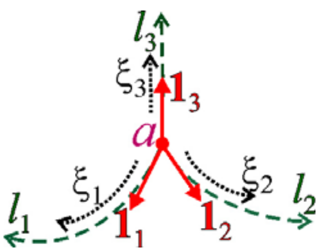


Рис. В.6. Координатные линии l_1, l_2, l_3 и орты $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_3$

Для определения положения точек наблюдения a и полей $T(a)$, $\mathbf{M}(a)$ в этих точках в (реальном для нас) трёхмерном пространстве мы пользуемся системами координат с тремя координатами: ξ_1, ξ_2, ξ_3. Пусть положение в пространстве точки a определяют координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 и начинает увеличиваться координата ξ_1, а координаты ξ_2, ξ_3 остаются неизменными. Тогда точка a будет перемещаться по линии l_1, которую называют *координатной линией* (рис. В.6). Аналогичным образом при увеличении координат ξ_2, либо ξ_3, и при фиксированных значениях других координат точка a будет перемещаться по координатной линии l_2, либо по координатной линии l_3 соответственно. Касательные к координатным линиям l_1, l_2, l_3 в точке a безразмерные единичные векторы (*орты*) $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_3$ показаны на рис. В.6.

В ортогональных (прямоугольных) системах координат (рис. В.7) единичные векторы $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_3$ в каждой точке a – взаимно ортогональны. Если векторы $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}_3$ образуют правую тройку, то систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 называют "правой". В правой ортогональной системе координат при вращении вектора $\mathbf{1}_1$ на наименьший угол (90°) в направлении вектора $\mathbf{1}_2$ направление вектора $\mathbf{1}_3$ определяет правило правого винта (рис. В.1, *в*, *г*).

Координатные поверхности S_1, S_2, S_3 – это, соответственно, поверхности $\xi_1=\text{const}$, $\xi_2=\text{const}$, $\xi_3=\text{const}$. На координатной поверхности S_1 лежат координатные линии l_2, l_3 и т. д. Бесконечно малый участок координатной поверхности, ограниченный двумя парами расположенных на бесконечно малых расстояниях координатных линий, называют координатным элементом координатной поверхности или *координатной площадкой*. Такой элемент dS_k координатной поверхности S_k ограничивают пары координатных линий l_i и l_j ($i, j, k=1, 2, 3$). Например, границами координатной площадки dS_3 являются пары координатных линий l_1, l_2. По нормали n к такой площадке направлен орт $\mathbf{1}_3$, то есть площадка dS_3, ортогональна координатной линии l_3.

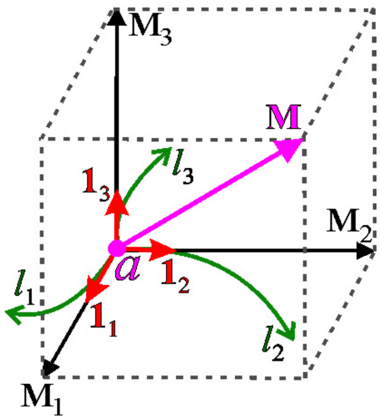


Рис. В.7.
Ортогональная система координат и вектор **M** как сумма векторных компонент $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$

Площади координатных площадок: $dS_1=dl_2{\cdot}dl_3$, $dS_2=dl_3{\cdot}dl_1$, $dS_3=dl_1{\cdot}dl_2$.

В ортогональных системах координатный элемент объёма dV – прямоугольный параллелепипед с рёбрами dl_1, dl_2, dl_3. Объём $dV=dl_1{\cdot}dl_2{\cdot}dl_3$.

Для определения скалярного поля T в системе координат надо выразить поле как функцию координат ξ_1, ξ_2, ξ_3: $T=T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В частных случаях поле T зависит не от трёх координат, а от двух или от одной координаты.

На рис. В.7 видно, что вектор **M** равен сумме трёх векторных компонент $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$. То есть для того, чтобы определить векторное поле **M** в ортогональных координатах, надо представить вектор **M** в виде суммы:

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3=\mathbf{1}_1{\cdot}M_1+\mathbf{1}_2{\cdot}M_2+\mathbf{1}_3{\cdot}M_3, \qquad \text{(в.4)}$$

где, в соответствии с выражениями (в.3), $\mathbf{M}_i=\mathbf{1}_i{\cdot}M_i$ ($i=1, 2, 3$), M_i – скалярные компоненты, а $\mathbf{M}_i$ – векторные компоненты вектора **M**. Скалярные компоненты $M_{1,2,3}$ надо определить как функции координат $\xi_{1,2,3}$: $M_1=M_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $M_2=M_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $M_3=M_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Некоторые из компонент поля **M** могут быть равны нулю, а ненулевые компоненты **M** могут зависеть не от трёх координат, а от двух или от одной координаты. В соответствии с выражениями (в.3), (в.4), если скалярная компонента M_i вектора **M** положительна, то векторная компонента $\mathbf{M}_i$ направлена как вектор $\mathbf{1}_i$. Если компонента M_i отрицательна, то направления векторов $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{1}_i$ противоположны (см. рис. В.1, *а* и рис. В.2).

Обратим внимание некоторых студентов на то, что такие действия, как сложение или вычитание скалярных компонент, M_1, M_2, M_3 не имеют смысла, так как соответствующие векторные компоненты $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ имеют разные направления. По скалярным компонентам можно, например, определить абсолютную величину вектора **M**: $|\mathbf{M}|=M=\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}$.

Будем пользоваться тремя правыми ортогональными системами координат: декартовой ($\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = z$), цилиндрической ($\xi_1 = r$, $\xi_2 = \varphi$, $\xi_3 = z$) и сферической ($\xi_1 = R$, $\xi_2 = \theta$, $\xi_3 = \varphi$).

***Декартову** систему координат* x, y, z образуют три взаимно ортогональные оси (направленные прямые) X, Y, Z пересекающиеся в точке O – начале координат (рис. В.8, *а*). Координатам x, y, z точки a соответствуют проекции этой точки на соответствующие координатные оси. Пределы изменения и размерности (единицы измерения) декартовых координат: $-\infty < x(\text{м}) < \infty$, $-\infty < y(\text{м}) < \infty$, $-\infty < z(\text{м}) < \infty$. Рис. В.8, *б* в дополнение к рис. В.7 иллюстрирует то, что, в соответствии с выражением (в.4), вектор $\mathbf{M}$ равен сумме трёх векторных компонент: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z$.

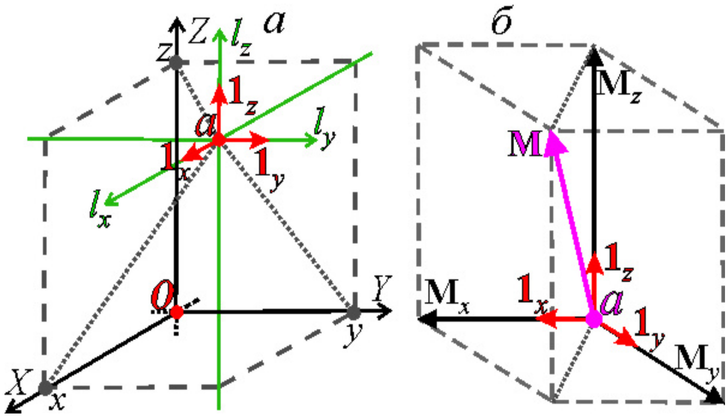


Рис. В.8.
Декартова система координат x, y, z (*а*); вектор $\mathbf{M}$ как сумма векторных компонент $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ в декартовых координатах (*б*)

Координатные линии l_x, l_y, l_z – прямые, параллельные соответствующим осям X, Y, Z. Орты $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ всюду направлены по линиям l_x, l_y, l_z и, соответственно, в любой точке параллельны осям X, Y, Z.

Координатные поверхности S_x, S_y, S_z – плоскости $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

***Цилиндрическая** система координат* r, φ, z (рис. В.9). Чтобы ввести эту систему координат, надо определить: положение в пространстве оси Z, начало координат O на этой оси и начало отсчёта угловой координаты φ ($\varphi = 0$) – полуплоскости, ограниченной осью Z. Координату z точки a определяет проекция точки a на ось Z; координата r – расстояние от точки a до оси Z; координата φ – угол между ограниченной осью Z полуплоскостью, проходящей через точку a, и полуплоскостью $\varphi = 0$. Понятно, что координата $r \geq 0$. Пределы изменения и размерности цилиндрических координат: $0 \leq r(\text{м}) < \infty$, $-\infty < \varphi(\text{рад}) < \infty$, $-\infty < z(\text{м}) < \infty$.

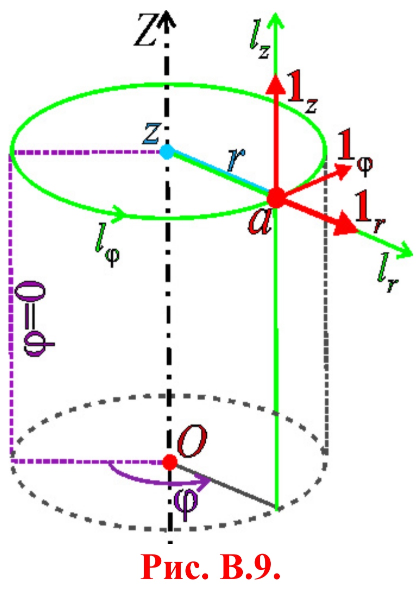


Рис. В.9.
Цилиндрическая система координат r, φ, z

Иногда полагают, что в цилиндрической (или в сферической) системе координата φ меняется, например, в пределах от нуля до 2π радиан. Очевидно, что при $-\infty < \varphi < \infty$ поле будет периодической функцией этой координаты (с периодом 2π), что часто оказывается удобнее.

Координатные линии: l_r – лучи, начинающиеся на оси Z и ортогональные этой оси; l_φ – окружности с осью Z; l_z – прямые, параллельные оси Z. В правой системе цилиндрических координат направления линий l_φ (направление отсчёта координаты φ) и направление оси Z образуют правовинтовую систему. Орт $\mathbf{1}_z$ всюду параллелен оси Z, а направления ортов $\mathbf{1}_r$ и $\mathbf{1}_\varphi$ зависят от координаты φ.

На рис. В.9 видно, что векторы $\mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_\varphi$ и $\mathbf{1}_z$ – взаимно ортогональны. На оси Z направления ортов $\mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_\varphi$ становятся неопределёнными.

Координатные поверхности: $r=\text{const}$ – круговые цилиндрические поверхности с осью Z; $\varphi=\text{const}$ – полуплоскости, ограниченные осью Z; $z=\text{const}$ – плоскости, ортогональные оси Z. В плоскости $z=\text{const}$ цилиндрические координаты r и φ идентичны соответствующим полярным координатам на плоскости.

***Сферическая** система координат* R, θ, φ (рис. В.10). Чтобы ввести эту систему координат, надо определить положение в пространстве полярной оси, показанной на рис. В.10 штрихпунктирной линией, выбрать начало координат O на этой оси и начало отсчёта координаты φ – полуплоскости $\varphi=0$, ограниченной полярной осью. Координата R точки a равна расстоянию L_{Oa} от начала координат O до точки a; координата θ – (полярный) угол между радиус-вектором $\mathbf{L}_{Oa}$ и направлением полярной оси; (азимутальная) координата φ – угол между ограниченной полярной осью полуплоскостью, проходящей через точку a, и полуплоскостью $\varphi=0$. В правой системе сферических координат направления отсчёта координаты φ и полярной оси образуют правовинтовую систему. Пределы изменения и размерности сферических координат: $0 \le R(\text{м}) < \infty$, $0 \le \theta(\text{рад}) \le \pi$, $-\infty < \varphi(\text{рад}) < \infty$.

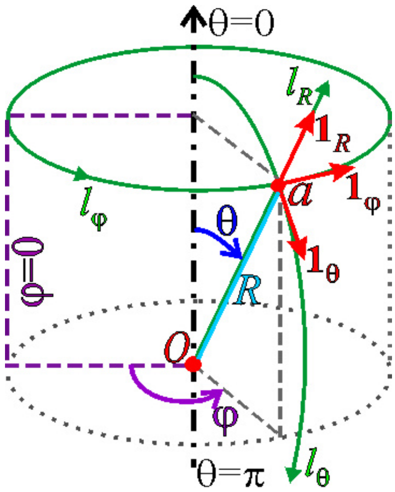


Рис. В.10.
Сферическая система координат R, θ, φ

Координатные линии: l_R – лучи, исходящие из начала координат O; l_θ – полуокружности с центром в точке O, опирающиеся на полярную ось; l_φ – окружности, осью которых является полярная ось. В сферических координатах направления ортов зависят от 2-х координат: θ и φ.

Представим себе (в качестве модели "идеального" шара) глобус с радиусом R, поверхностью S и с центром в начале O сферических координат. Направим полярную ось так, чтобы она проходила через "северный полюс" и на этом полюсе угол $\theta=0$. Тогда в сферических координатах на поверхности S орты $\mathbf{1}_\theta$ будут направлены по касательным к меридианам на юг, орты $\mathbf{1}_\varphi$ – по касательным к параллелям на восток, а орты $\mathbf{1}_R$ – в зенит.

На полярной оси направления ортов $\mathbf{1}_\theta$, $\mathbf{1}_\varphi$ становятся неопределёнными, а в начале координат O неопределённы направления всех трёх ортов.

Координатные поверхности: $R=\text{const}$ – сферические поверхности с центром в начале координат O; $\theta=\text{const}$ – круговые конические поверхности с вершинами в точке O и общей осью по полярной оси; $\varphi = \text{const}$ – полуплоскости, ограниченные полярной осью.

К о о р д и н а т ы (в одной и той же системе ортогональных координат) – *в з а и м н о н е з а в и с и м ы*. Это означает, что изменение, например, координаты ξ_i не ведёт неизбежно к изменению координат ξ_j, ξ_k. Производные полей T или **M** по той или иной координате – это *частные* производные. Например, при дифференцировании поля T по ξ_i это – частная производная $\partial T/\partial \xi_i$; при таком дифференцировании два других аргумента ξ_j, ξ_k поля T – константы.

Иначе обстоит дело при применении совмещённых систем координат. Если, например, воспользоваться декартовой и цилиндрической системами координат с общими началом координат O и осью Z, то пары координат x, y и r, φ – взаимно зависимы. К примеру, при изменении декартовой координаты x меняются цилиндрические координаты r и φ и т. д.

Коэффициенты Ламэ h_i $(i = 1, 2, 3)$ определяют связь между приращением $d\xi_i$ координаты ξ_i и перемещением dl_i вдоль координатной линии l_i, которое совершает при этом точка (рис. B.11, *а*):

$$h_i = dl_i / d\xi_i; \qquad dl_i = h_i \cdot d\xi_i. \tag{в.5}$$

Определим коэффициенты Ламэ для декартовых, цилиндрических и сферических координат. В этих системах координат существенно различается два вида координатных линий.

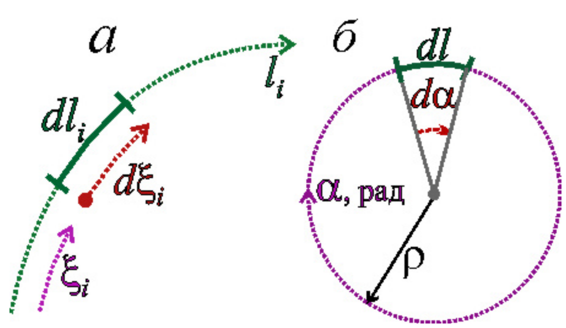


Рис. B.11.
К определению коэффициентов Ламэ

1. Линии l_x, l_y, l_z, l_r, l_R – прямые или лучи. Координаты x, y, z, r, R определяют в единицах длины (метрах). Очевидно, что коэффициенты Ламэ для этих координат равны единице, так как путь, проходимый точкой при приращении (увеличении) какой-либо из этих координат, равен величине этого приращения. Следовательно, $h_x = h_y = h_z = h_r = h_R = 1$.

2. Линии l_φ в цилиндрической – и l_θ, l_φ в сферической системах координат – окружности или полуокружности. Координаты θ и φ определяют в безразмерных угловых единицах (радианах). Рассмотрим, как связан путь dl, проходимый точкой по дуге окружности радиуса ρ, с приращением $d\alpha$ угловой координаты α (рис. B.11, *б*). По определению центральный угол (в радианах) равен длине ограниченной двумя радиусами дуги окружности, делённой на радиус этой окружности. Следовательно, $d\alpha = dl/\rho$, то есть $\rho = dl/d\alpha$. При сравнении последнего равенства с определением (в.5)$_1$ коэффициента Ламэ h_i видно, что в случае, если измеряемая в радианах координата – угловая, а координатная линия – окружность (или полуокружность), то коэффициент Ламэ равен радиусу этой окружности. Тогда для коэффициентов Ламэ получаем: в цилиндрических координатах $h_\varphi = r$ (см. рис. B.9), а в сферических – $h_\theta = R$, $h_\varphi = R \cdot \sin\theta$ (см. рис. B.10).

Из сказанного следует, что в *декартовых* координатах площади координатных площадок: $dS_x = dl_y \cdot dl_z = dy \cdot dz$, $dS_y = dl_z \cdot dl_x = dz \cdot dx$, $dS_z = dl_x \cdot dl_y = dx \cdot dy$;

объём $dV = dl_x \cdot dl_y \cdot dl_z = dx \cdot dy \cdot dz$. В *цилиндрических* координатах: $dS_r = dl_\varphi \cdot dl_z = r \cdot d\varphi \cdot dz$, $dS_\varphi = dl_z \cdot dl_r = dz \cdot dr$, $dS_z = dl_r \cdot dl_\varphi = r \cdot dr \cdot d\varphi$; объём $dV = dl_r \cdot dl_\varphi \cdot dl_z = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$. В *сферических* координатах: $dS_R = dl_\theta \cdot dl_\varphi = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$, $dS_\theta = dl_\varphi \cdot dl_R = R \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot dR$, $dS_\varphi = dl_R \cdot dl_\theta = R \cdot dR \cdot d\theta$; объём $dV = dl_R \cdot dl_\theta \cdot dl_\varphi = R^2 \cdot \sin\theta \cdot dR \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

в.5. О телесном угле и угле видимости

Более детально эти вопросы рассмотрены в разделе II § 9 главы первой. А здесь ограничимся следующим.

Вспомним сначала определение образуемого двумя выходящими из точки O лучами плоского угла α в радианах (рис. В.12, *а*). Если $l_{\text{ОКР}}$ – длина ограниченной этими лучами дуги окружности с радиусом R и с центром в точке O, то центральный угол $\alpha = l_{\text{ОКР}}/R$, рад. Пределы изменения такого угла: $0 \le \alpha \le 2\pi$. Отношение $\alpha/2\pi$ определяет то, *какая часть плоскости* ограничена ("вырезана") этими лучами.

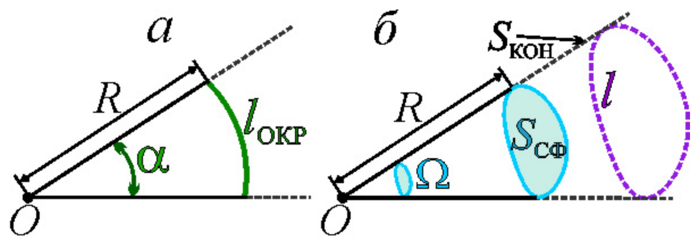


Рис. В.12.

К определению плоского угла α (*а*) и телесного угла Ω (*б*)

Определим теперь понятие "телесный угол Ω". Представим себе коническую поверхность $S_{\text{КОН}}$ с вершиной в точке O и направляющей в виде замкнутой линии l (рис. В.12, *б*). Такая поверхность $S_{\text{КОН}}$ содержит все точки лучей, начинающихся в точке O и пересекающихся с линией l. Показанная на рис. В.12, *б* поверхность $S_{\text{СФ}}$ – это ограниченная ("вырезанная") поверхностью $S_{\text{КОН}}$ часть сферической поверхности с центром в точке O и с радиусом R. *Телесный угол* Ω при вершине O конической поверхности: $\Omega = S_{\text{СФ}}/R^2$. Безразмерные единицы, в которых определяют углы Ω, называют *стерадиан* (ср). Пределы изменения этого угла: $0 \le \Omega \le 4\pi$.

Отношение $\Omega/4\pi$ определяет то, *какая часть пространства* ограничена ("вырезана") поверхностью $S_{\text{КОН}}$. Для полного телесного угла, "ограничивающего" всё пространство, $\Omega = 4\pi$, $\Omega/4\pi = 1$, так как площадь $S_{\text{СФ}} = 4\pi \cdot R^2$. Поэтому иногда говорят "4-х пийное" пространство. Если поверхность $S_{\text{КОН}}$ – плоскость, то она будет ограничивать половину пространства (полупространство). В этом случае площадь $S_{\text{СФ}} = 2\pi \cdot R^2$, $\Omega = 2\pi$, $\Omega/4\pi = 0.5$. Отсюда – термин "2-х пийное" полупространство.

Угол видимости $d\omega(q)$ из точки q ориентированной элементарной площадки dS с центром в точке a определяет выражение: $d\omega(q) = \dfrac{dS}{L_{qa}^2}\cos\left(\mathbf{L}_{qa}, n\right)$, где n – нормаль к площадке dS. Из этого определения угла $d\omega(q)$ следует, что при нулевом или остром угле между направлениями

$\mathbf{L}_{qa}$, n величина $d\omega > 0$ (рис. В.13, *а*). Если этот угол тупой или равен π, то $d\omega < 0$ (рис. В.13, *б*), а если угол прямой ($\mathbf{L}_{qa} \perp n$), то $d\omega = 0$. Пользуясь, как и ранее, понятием вектора **dS** с абсолютной величиной dS и направлением по нормали n, можем записать выражение для угла видимости $d\omega(q)$ в виде: $d\omega(q) = \dfrac{(\mathbf{L}_{qa}\ \mathbf{dS})}{L_{qa}^3}$.

На рис. В.13, *а* схематично показан бесконечно малый телесный угол $d\Omega$ при вершине q конической поверхности $S_{\text{КОН}}$ с направляющей $l[dS]$ – замкнутой

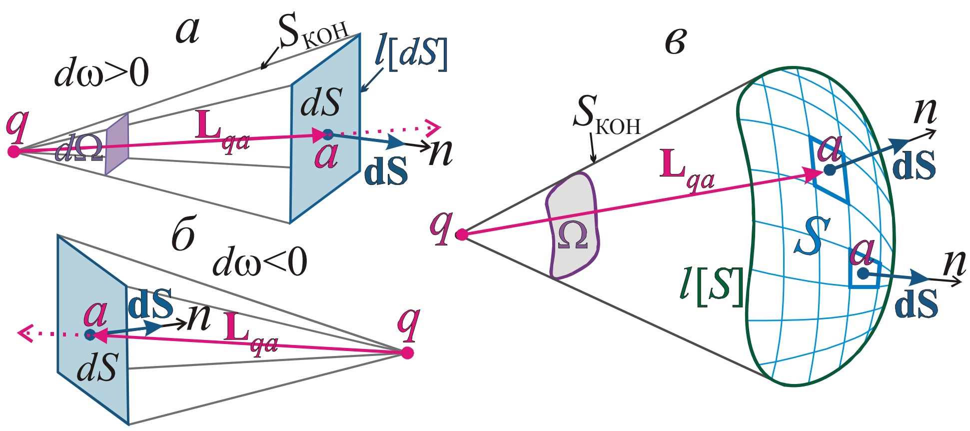


Рис. В.13.

К углу видимости $d\omega$ ориентированной площадки **dS** при $d\omega > 0$ (*а*) и $d\omega < 0$ (*б*); к определению угла видимости ω поверхности S (*в*)

линией, ограничивающей площадку dS. Можно доказать, что абсолютная величина $|d\omega(q)| = d\Omega$. Действительно, абсолютная величина $\left|d\omega(q)\right| = \dfrac{dS}{L_{qa}^2}\left|\cos(\mathbf{L}_{qa}, n)\right|$, но произведение $dS\cdot|\cos(L_{qa}, n)| = dS_{\text{СФ}}$, где $dS_{\text{СФ}}$ – элемент сферической поверхности с радиусом $R = L_{qa}$, ограниченный поверхностью $S_{\text{КОН}}$. То есть абсолютная величина $|d\omega(q)| = dS_{\text{СФ}}/R^2 = d\Omega$ (см. также рис. 1.15, *б* в разделе II § 9 главы первой).

Угол видимости $\omega(q)$ из точки q ориентированной (с выбранным направлением нормали n) поверхности S это сумма углов видимости $d\omega(q)$ всех ориентированных элементарных площадок dS, из которых состоит эта поверхность:

$$\omega(q) = \int_S d\omega(q) = \int_S \frac{(\mathbf{L}_{qa}\ \mathbf{dS})}{L_{qa}^3}. \tag{в.6}$$

Понятно, что $\omega(q)$ – скалярная величина (в стерадианах), которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю. При показанных на рис. В.13, *в* положении точки q и направлениях нормалей n к поверхности S величина $\omega(q) > 0$. Можно доказать, что для не замкнутой поверхности S абсолютная величина $|\omega(q)|$ равна телесному углу Ω при вершине конической поверхности $S_{\text{КОН}}$ с вершиной в точке q и направляющей $l[S]$ – замкнутой линией, ограничивающей поверхность S (рис. В.13, *в*).

Какими будут углы видимости ω некоторых поверхностей S с заданными направлениями нормалей n? Рассмотрим несколько примеров.

***а*).** S – плоскость $П$, разграничивающая две области (два полупространства) V_1 и V_2. На рис. В.14, *а* показан след ортогональной плоскости рисунка плоскости $П$. Будем полагать, что нормаль n к $П$ направлена из области V_1 в область V_2. Определим углы видимости $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ плоскости $П$ из точек 1, 2, расположенных соответственно в полупространствах V_1, V_2. Если эти точки – вершины конических поверхностей с направляющими в виде бесконечно удалённой "границы" плоскости $П$, то фактически эти конические поверхности будут параллельными $П$ плоскостями и телесные углы при их вершинах 1, 2: $\Omega_{1,2} = 2\pi$. Иначе говоря, плоскость $П$ "закроет от наблюдателя" в

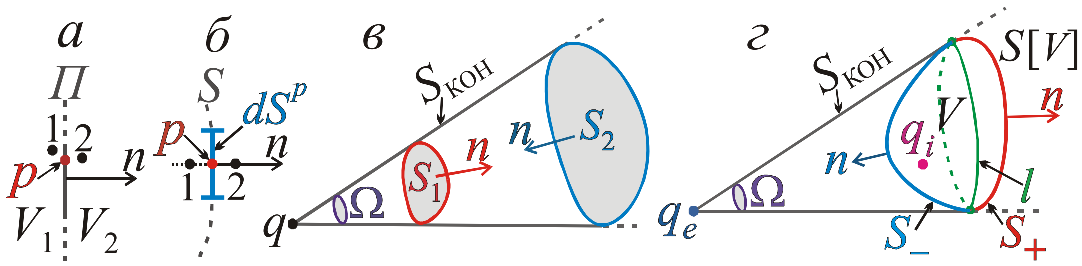


Рис. В.14.

К определению углов видимости ω в нескольких частных случаях

точке 1 или в точке 2 полупространство. В связи со сказанным выше это означает, что абсолютные величины $|\omega^{(1,2)}| = 2\pi$. Но, если p – произвольная точка на плоскости $П$, то при выбранном направлении нормали n $\cos(\mathbf{L}_{1p}, n) > 0$, $\cos(\mathbf{L}_{2p}, n) < 0$. Поэтому, в соответствии с выражением (в.6), $\omega^{(1)} > 0$, $\omega^{(2)} < 0$. Следовательно, углы видимости плоскости $П$ из точек 1, 2: $\omega^{(1)} = 2\pi$, $\omega^{(2)} = -2\pi$.

***б*).** В выражении (в.6) вместо поверхности S – элемент этой поверхности, лежащая на (гладкой) поверхности S (ортогональная плоскости рисунка В.14, *б*) бесконечно малая площадка dS^p с центром в точке p и с нормалью n. Определим углы видимости $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ площадки dS^p из (расположенных по разные стороны от dS^p) точек 1, 2 при условии, что расстояния $L_{1p} \to 0$, $L_{2p} \to 0$. При указанных условиях, как и в предыдущем примере, площадка dS^p "закроет от наблюдателя" в точке 1 или в точке 2 полупространство. Следовательно, при $L_{1p} \to 0$, $L_{2p} \to 0$ абсолютные величины $|\omega^{(1,2)}| \to 2\pi$. Так как (при показанном на рис. В.14, *б* направлении n) $\cos(\mathbf{L}_{1p}, n) > 0$, $\cos(\mathbf{L}_{2p}, n) < 0$, то $\omega^{(1)} > 0$, $\omega^{(2)} < 0$. Следовательно,

$$\text{при} \quad L_{1p} \to 0,\ L_{2p} \to 0: \quad \omega^{(1)} \to 2\pi,\ \omega^{(2)} \to -2\pi. \qquad \text{(в.7)}$$

***в*).** S_1, S_2 – поверхности, границы $l[S_1]$, $l[S_2]$ которых лежат на одной и той же конической поверхности с вершиной в точке q и с телесным углом Ω при вершине q (рис. В.14, *в*). В соответствии с изложенным выше абсолютные величины углов видимости поверхностей S_1, S_2 из точки q – одинаковы и равны

Ω. Но при показанных на рис. В.14, *в* направлениях нормалей n угол видимости поверхности S_1 из точки q $\omega_1(q) > 0$, а угол видимости поверхности S_2 $\omega_2(q) < 0$. Отсюда следует, что $\omega_1(q) = \Omega$, а $\omega_2(q) = -\Omega$.

***г*)**. $S[V]$ – замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства V. Определим углы видимости ω поверхности $S[V]$ их двух точек: $\omega(q_i)$ из точки q_i, находящейся в области V; $\omega(q_e)$ из точки q_e, находящейся вне области V (рис. В.14, *г*). Поверхность $S[V]$ "закроет от наблюдателя" в точке q_i всё ("4-х пийное") пространство. Следовательно, абсолютная величина $|\omega(q_i)| = 4\pi$. При направлениях нормалей n к $S[V]$ наружу относительно области V углы между направлениями векторов $\mathbf{L}_{q_i a}$ и направлениями нормалей n – острые и, в соответствии с выражением (в.6), $\omega(q_i) > 0$. Следовательно, $\omega(q_i) = 4\pi$.

Теперь представим себе коническую поверхность $S_{\text{КОН}}$ с вершиной в точке q_e, телесным углом Ω при вершине и направляющей в виде замкнутой линии l, лежащей на поверхности $S[V]$ (рис. В.14, *г*). Образующие линию l точки – это точки, общие для поверхностей $S[V]$ и $S_{\text{КОН}}$. Линия l делит поверхность $S[V]$ на две части: S_+ и S_-. В соответствии с рассмотренным выше примером "***в***" углы видимости поверхностей S_+ и S_- из точки q_e: $\omega_+(q_e) = \Omega$, $\omega_-(q_e) = -\Omega$. Так как угол видимости поверхности $S[V]$ $\omega(q_e) = \omega_+(q_e) + \omega_-(q_e)$, то $\omega(q_e) = \Omega + (-\Omega) = 0$. Итак, угол видимости замкнутой поверхности $S[V]$ из точки q:

$$\omega(q) = \begin{cases} 4\pi, \text{ если } q - \text{ в области } V, \\ 0, \text{ если } q - \text{ вне области } V. \end{cases} \qquad (в.8)$$

в.6. О потоке векторного поля, напряжении, циркуляции

Более подробно вопросы, связанные с напряжением и циркуляцией поля **M**, рассмотрены в разделе II § 3 главы первой.

Поток вектора. Определим сначала понятие (скалярного) потока $d\psi$ вектора (векторного поля) **M** через бесконечно малый элемент поверхности (ориентированную элементарную площадку) dS с выбранным направлением нормали n к dS (рис. В.15, *а*). *П о т о к* $d\psi = M \cdot dS \cdot \cos(\mathbf{M}, n)$. Отсюда следует, что $d\psi$ – скалярная величина, знак которой совпадает со знаком косинуса угла между направлениями вектора **M** и нормали n. Этот поток положителен, если угол ($\mathbf{M}$, n) – острый или равен нулю.

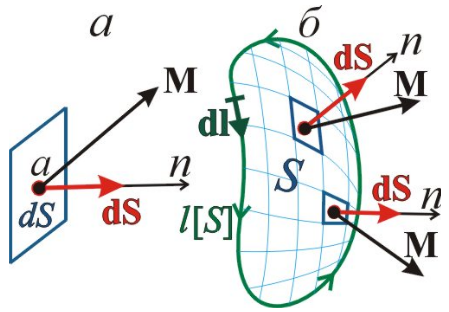


Рис. В.15.
К определению потока вектора **M** через элементарную площадку dS (a) и поверхность S ($б$)

Ранее уже пользовались понятием ориентированной элементарной площадки, как вектора $\mathbf{dS}$ с абсолютной величиной $|\mathbf{dS}| = dS$ и направлением по нормали n к dS. Понятно, что поток $d\psi$ можно выразить скалярным произведением: $d\psi = (\mathbf{M}\ \mathbf{dS})$.

В разделах I § 3 и II § 4 главы первой будет введено понятие векторного потока вектора **M**. Такой поток через элементарную ориентированную площадку **dS** равен векторному произведению [**dS M**]. То, о чём идёт речь в этом разделе, это – скалярный поток вектора.

П о т о к ψ *в е к т о р а* **M** *ч е р е з п о в е р х н о с т ь* S (рис. В.15, *б*) определяет интеграл по этой поверхности $\psi = \int\limits_S d\psi$, то есть $\psi = \int\limits_S (\mathbf{M}\ \mathbf{dS})$. Из этого определения следует, что поток ψ – скалярная величина, которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Если, например, как это показано на рис. В.15, *б*, углы между направлениями векторов **M** на S и направлениями нормалей n к S – острые или нулевые на всей поверхности S, то поток $\psi > 0$.

Поток ψ вектора **M** через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область пространства V, будем обозначать следующим образом: $\psi = \oint\limits_{S[V]} (\mathbf{M}\ \mathbf{dS})$.

В этом случае (если не оговорено противоположное) будем полагать, что нормали n к $S[V]$ и, соответственно, векторы **dS** направлены наружу относительно области пространства V (рис. В.16, *а*). Как убедимся ниже, поток ψ через $S[V]$ тесно связан с расположенными в V источниками поля **M**. Во многих случаях знак потока ψ через $S[V]$ отражает некоторые "геометрические" особенности поля **M** в области V и на её границе $S[V]$.

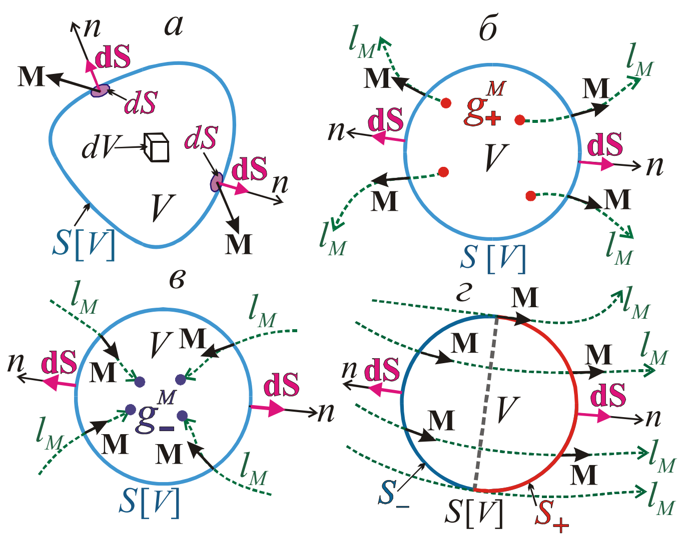


Рис. В.16.
К потоку вектора **M** через замкнутую поверхность $S[V]$

На рис. В.16, *б* показаны возможные направления векторов **M** на поверхности $S[V]$ и векторных линий l_M в окрестности области V при положительном потоке ψ. Видно, что в этом случае линии l_M имеют начало в точках $g^M{}_+$, расположенных в области V, и "выходят" из этой области. На рис. В.16, *в* показаны возможные направления линий l_M в том случае, когда поток ψ через $S[V]$ отрицателен. При этом линии l_M "входят" в область V и оканчиваются в точках $g^M{}_{-}$ внутри этой области.

На рис. В.16, *г* линии l_M "проходят" через область V, не начинаясь и не оканчиваясь в этой области. В этом случае поток $\psi = \psi_+ + \psi_-$, где $\psi_+ > 0$ и $\psi_- < 0$ – потоки вектора **M** через две части S_+ и S_- поверхности $S[V]$ (см. рис. В.16, *г*). Если $\psi_+ = -\psi_-$, то поток ψ через $S[V]$ равен нулю.

Напряжение, циркуляция. *Напряжение* $d\mathcal{E}$ поля **M** на элементарном направленном отрезке ("пути") **dl** определяет выражение: $d\mathcal{E} = M \cdot dl \cdot \cos(\mathbf{M}, \mathbf{dl}) = (\mathbf{M}\,\mathbf{dl})$ (рис. В.17, *а*), где $dl = |\mathbf{dl}|$ – длина этого отрезка. При остром или нулевом угле **M**, **dl** напряжение $d\mathcal{E} > 0$, при тупом (или равном π) угле **M**, **dl** напряжение $d\mathcal{E} < 0$. Если этот угол – прямой, то $d\mathcal{E} = 0$.

Напряжение $\mathcal{E}_{12}$ на пути l из точки 1 в точку 2 (направленной линии l с началом в точке 1 и концом в точке 2, см. рис. В.17, *б*) определяет криволинейный интеграл: $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{12} = \int_1^2 d\boldsymbol{\mathcal{E}} = \int_1^2 (\mathbf{M}\,\mathbf{dl})$. Понятно, что в зависимости от направлений векторов **M** в точках линии l и направлений её элементарных отрезков **dl** скалярная величина $\mathcal{E}_{12}$ может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Циркуляция $Ц$ – это напряжение векторного поля **M** по замкнутой направленной линии (контуру) l. То есть при заданном направлении перемещения точки по этой линии (и заданных направлениях отрезков **dl**) $Ц = \oint_l (\mathbf{M}\,\mathbf{dl})$ (рис. В.17, *в*).

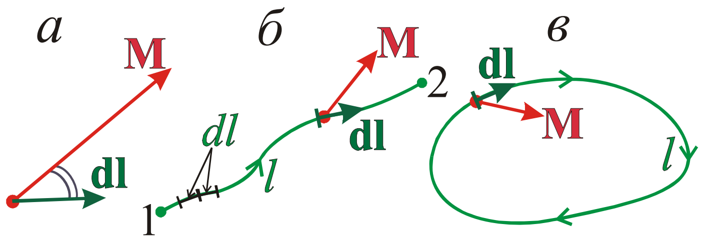


Рис. В.17.
Напряжение поля **M**: на элементарном отрезке ("пути") **dl** (*а*), по линии l (*б*); циркуляция – напряжение по замкнутой линии l (*в*)

Подобно потоку ψ вектора **M** через замкнутую поверхность циркуляция $Ц$ характеризует, в частности, некоторые "геометрические особенности" поля **M**.

На рис. В.18, *а* приведен пример для случая, когда поле **M** – *однородно* в рассматриваемой области пространства, то есть векторы **M** одинаковы (по абсолютной величине и направлению) во всех точках этой области, а векторные линии l_M – взаимно параллельные прямые.

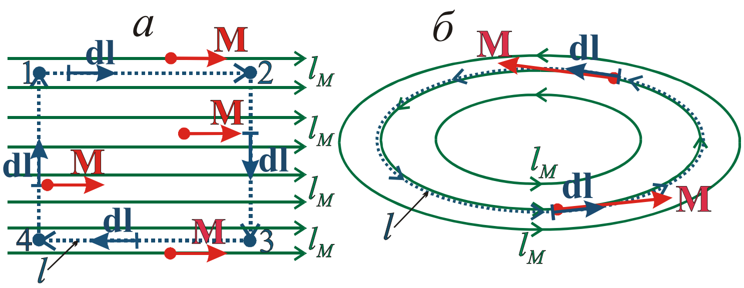


Рис. В.18.
Простейшие примеры полей **M** с нулевой (*а*) и ненулевой (*б*) циркуляцией $Ц$

Пунктиром показана замкнутая направленная линия l в форме прямоугольника с вершинами в точках 1, 2, 3, 4. На сторонах l_{23} и l_{41} прямоугольника l отрезки $\mathbf{dl} \perp \mathbf{M}$ и скалярные произведения $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = 0$. На стороне l_{12} $\mathbf{dl} \,||\, \mathbf{M}$ и $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = M{\cdot}dl$, а на стороне l_{34} $\mathbf{dl} \uparrow\downarrow \mathbf{M}$ и $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = -M{\cdot}dl$. Ясно, что циркуляция по линии l: $\oint\limits_l (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{23} + \mathcal{E}_{34} + \mathcal{E}_{41} = M{\cdot}l_{12} + 0 - M{\cdot}l_{34} + 0 = 0$, так как длины отрезков l_{12} и l_{34} – одинаковы.

На рис. В.18, *б* векторные линии l_M поля $\mathbf{M}$ – замкнутые. Понятно, что, (по крайней мере) по линиям l_M циркуляция $Ц = \oint\limits_{l_M} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) \neq 0$, так как, в зависимости от выбранного направления обхода линии l_M, углы между направлениями $\mathbf{M}$ и $\mathbf{dl}$ равны нулю либо π и, соответственно, величины $\cos(\mathbf{M}, \mathbf{dl})$ равны единице, либо минус единице. При показанном на рисунке направлении обхода линии l (пунктирная линия) по этой линии все значения $\cos(\mathbf{M}, \mathbf{dl}) = 1$ и циркуляция $Ц > 0$.

в.7. О первых пространственных производных

Более детально эти вопросы рассмотрены в § 2 и разделах III, IV § 3 главы первой.

Пространственные производные скалярного поля $T(a)$ и векторного поля $\mathbf{M}(a)$ характеризуют некоторые особенности изменения полей в окрестности точки a. Как убедимся ниже, при рассмотрении уравнений векторных полей, пространственные производные таких полей тесно связаны с плотностями их возбудителей.

Градиент (grad) – первая пространственная производная скалярного поля T. $\operatorname{grad} T(a)$ – векторное поле. Производная $\operatorname{grad} T(a)$ – вектор, имеющий направление наиболее резкого (интенсивного) возрастания поля T в окрестности точки a и абсолютную величину, равную производной поля T по направлению $\operatorname{grad} T$. Возможно, последнее требует пояснения.

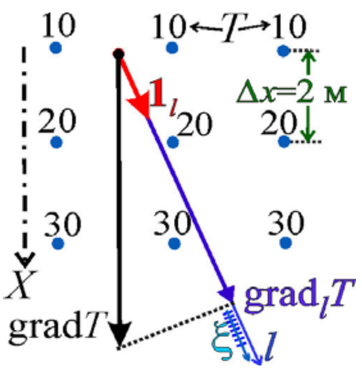


Рис. В.19.
Вектор grad T и его векторная компонента $\operatorname{grad}_l T$ по направлению l

Рассмотрим простейший пример. Пусть "распределение" поля T одинаково в любой плоскости, параллельной плоскости рисунка (рис. В.19), значения T линейно возрастают в направлении "сверху вниз". Это – направление лежащего в плоскости рисунка вектора $\operatorname{grad} T$ и направление оси X. В соответствии с приведенным выше определением абсолютная величина $|\operatorname{grad} T| = dT/dx$. В этом случае принимая во внимание, что $\dfrac{dT}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta x}$, а в приведенном на рис. В.19 примере поле T линейно возрастает по направлению оси X, абсолютная величина $|\operatorname{grad} T| = \Delta T/\Delta x$. Поэтому при показанных на рис. В.19 расстояниях Δx между узлами "квадратной сетки" ($\Delta x = 2$ м) и численных значениях T ($\Delta T = 10\,pp$) имеем: $|\operatorname{grad} T| = dT/dx \cong \Delta T/\Delta x = 10\,pp/2$ м $= 5\,pp$/м, где pp – размерность скалярного поля T (например, мВ).

На рис. В.19 (для случая, когда вектор $\operatorname{grad} T$ лежит в плоскости чертежа) показана векторная компонента $\operatorname{grad}_l T$ по направлению линии l. Эта компонента $\mathrm{grad}_l\, T = \mathbf{1}_l \cdot grad_l\, T$, где $\mathbf{1}_l$ – безразмерный единичный вектор по направлению l, а $grad_l\, T$ – скалярная компонента вектора $\mathrm{grad}\, T$ по направлению l. Согласно выражению (в.3) скалярная компонента $grad_l\, T = (\mathbf{1}_l\, \mathrm{grad}\, T)$. Отсюда следует (см. раздел I § 2 главы первой), что скалярная компонента $grad_l\, T = \partial T/\partial l$.

Понятно, что (противоположный по направлению $\mathrm{grad}\, T$) вектор $-\mathrm{grad}\, T$ направлен в сторону наиболее резкого убывания ("падения") поля T. Если в области пространства V поле $T(a)$ однородно (одинаково во всех точках a), то в этой области $\mathrm{grad}\, T = 0$.

Если l – координатная линия, по которой перемещается точка при увеличении координаты ξ, то $\partial l = h_\xi \cdot \partial\xi$, где h_ξ – коэффициент Ламэ для координаты ξ (см. формулы (в.5)). В этом случае скалярную ($grad_l\, T$) и векторную ($\mathrm{grad}_l\, T = \mathbf{1}_\xi \cdot grad_l\, T$) компоненты вектора $\mathrm{grad}\, T$ определяют выражения:

$$grad_l\, T = \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad \mathrm{grad}_l\, T = \frac{\mathbf{1}_\xi}{h_\xi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi}. \qquad \text{(в.9)}$$

Складывая три взаимно ортогональные векторные компоненты вектора $\mathrm{grad}\, T$, получаем выражения для этого вектора в произвольных ортогональных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 и, в частности, в декартовых координатах x, y, z, в которых $h_x = h_y = h_z = 1$:

$$\mathrm{grad}\, T = \frac{\mathbf{1}_1}{h_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{1}_2}{h_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{1}_3}{h_3} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi_3}, \quad \mathrm{grad}\, T = \mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}. \qquad \text{(в.10)}$$

Для записи пространственных производных бывает удобно воспользоваться оператором Гамильтона (оператором набла) ∇. В декартовых координатах этот оператор

$$\nabla = \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}. \qquad \text{(в.11)}$$

При сравнении выражений (в.11), $(\text{в.}10)_2$ видим, что

$$\mathrm{grad}\, T = \nabla T. \qquad \text{(в.12)}$$

Дивергенция (div) – первая (скалярная) пространственная производная векторного поля $\mathbf{M}$. $\mathrm{div}\, \mathbf{M}(a)$ – скалярное поле. По определению дивергенция поля $\mathbf{M}$ точке a

$$\mathrm{div}\, \mathbf{M}(a) = \frac{\oint\limits_{S[dV]} (\mathbf{M}\, \mathbf{dS})}{dV}, \qquad \text{(в.13)}$$

где точка a – центр бесконечно малой области пространства с объёмом dV, а $S[dV]$ – ограничивающая эту область замкнутая поверхность (рис. В.20, *а*).

Так как объём $dV > 0$, то в (в.13) знаки $\operatorname{div} \mathbf{M}$ и потока $\oint\limits_{S[dV]} (\mathbf{M}\, d\mathbf{S})$ одинаковы. Поэтому, например, если на рис. В.16, *б, в, г* заменить области V на элементарные объёмы dV с центрами в точках a, то первый из этих рисунков будет иллюстрировать возможные особенности "поведения" поля $\mathbf{M}$ в бесконечно малой окрестности точки a при $\operatorname{div} \mathbf{M}(a) > 0$, второй – при $\operatorname{div} \mathbf{M}(a) < 0$, а третий – при $\operatorname{div} \mathbf{M}(a) = 0$.

Производная $\operatorname{div} \mathbf{M}$ тесно связана с плотностью источников поля $\mathbf{M}$. В тех точках a, где $\operatorname{div} \mathbf{M}(a) \neq 0$, находятся *источники поля* $\mathbf{M}$. Иногда применяют следующую терминологию. Там, где $\operatorname{div} \mathbf{M}(a) > 0$ находятся *истоки* поля $\mathbf{M}$, а там, где $\operatorname{div} \mathbf{M}(a) < 0$ – *стоки* поля $\mathbf{M}$.

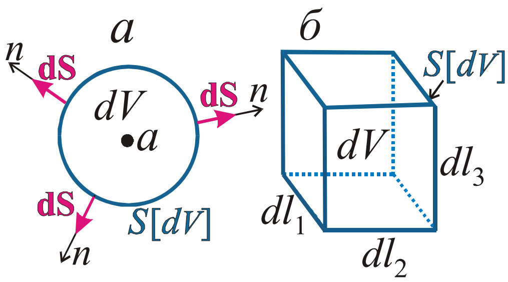


Рис. В.20.
К определению пространственной производной $\operatorname{div} \mathbf{M}$

Определяющее понятие $\operatorname{div} \mathbf{M}(a)$ выражение (в.13), с иллюстрациями на рис. В.20, *а*, а также – теми, которые приведены на рис. В.16, *б - г*, позволяют пояснить то, какие "геометрические" особенности поля $\mathbf{M}(a)$ характеризует производная $\operatorname{div} \mathbf{M}$. Но воспользоваться выражением (в.13) для расчёта $\operatorname{div} \mathbf{M}$ совсем не просто. Это выражение можно упростить для расчёта $\operatorname{div} \mathbf{M}$ в системах ортогональных координат.

В разделе IV § 3 главы первой будет показано, что применяя выражение (в.13) к координатному элементу объёма dV – прямоугольному параллелепипеду с рёбрами $dl_1 = h_1 \cdot d\xi_1$, $dl_2 = h_2 \cdot d\xi_2$, $dl_3 = h_3 \cdot d\xi_3$ (рис. В.20, *б*) – элементарными отрезками координатных линий l_1, l_2, l_3 – можно выразить $\operatorname{div} \mathbf{M}$ через частные производные по координатам. В частности, в декартовых координатах, где $dl_1 = dx$, $dl_2 = dy$, $dl_3 = dz$, а поле $\mathbf{M} = \mathbf{1}_x \cdot M_x + \mathbf{1}_y \cdot M_y + \mathbf{1}_z \cdot M_z$, производная

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \qquad (в.14)$$

Пользуясь декартовой системой координат докажем, что скалярное произведение оператора набла на вектор $\mathbf{M}$: $(\nabla\, \mathbf{M}) = \operatorname{div} \mathbf{M}$.

В соответствии с выражениями (в.4) и (в.11) (при заменах индексов: $1 \to x$, $2 \to y$, $3 \to z$) получаем следующее.

$(\nabla\, \mathbf{M}) = \left(\left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z \right\} \right)$. Принимая во внимание выражение (в.1) для скалярного произведения векторов и учитывая, что скалярные произведения $(\mathbf{1}_x\, \mathbf{1}_x) = 1$, $(\mathbf{1}_x\, \mathbf{1}_y) = 0$, $(\mathbf{1}_x\, \mathbf{1}_z) = 0$, $(\mathbf{1}_y\, \mathbf{1}_x) = 0$, $(\mathbf{1}_y\, \mathbf{1}_y) = 1$, и т. д., получаем: $(\nabla\, \mathbf{M}) = \partial M_x / \partial x + 0 + 0 + 0 + \partial M_y / \partial y + 0 + 0 + 0 + \partial M_z / \partial z$, что совпадает с выражением (в.14) для $\operatorname{div} \mathbf{M}$. Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = (\nabla\, \mathbf{M}). \qquad (в.15)$$

Ротор (rot, а в связанных с векторным анализом работах на английском языке – curl) – первая пространственная (векторная) производная векторного поля $\mathbf{M}$.

Производная rot **M** – векторное поле. Скалярную компоненту $rot_n\,\mathbf{M}(a)$ (по направлению n) вектора rot $\mathbf{M}(a)$ в точке a определяет выражение:

$$rot_n\,\mathbf{M}(a) = \frac{\oint\limits_{l[dS]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl})}{dS}, \qquad \text{(в.16)}$$

где n – нормаль к элементарной площадке dS (с центром в точке a), ограниченной замкнутой линией $l[dS]$ (рис. В.21, *а*). Направление обхода по линии $l[dS]$ образует правовинтовую систему с направлением нормали n. Из выражения (в.16) следует, что скалярная компонента $rot_n\,\mathbf{M}(a)$ имеет тот же знак, что циркуляция $Ц = \oint\limits_{l[dS]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl})$. При $Ц=0$ компонента $rot_n\,\mathbf{M}(a)=0$ (см., например, рис. В.18, *а*).

В системе ортогональных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 можем получить более простые, чем (в.16), выражения для компонент вектора rot **M**. Пусть на координатной поверхности S_1, на которой $\xi_1=\text{const}$, лежит координатная площадка dS_1 в виде бесконечно-малого прямоугольника со сторонами dl_2, dl_3 (отрезками координатных линий) и нормалью по направлению орта $\mathbf{1}_1$ (рис. В.21, *б*). Применяя выражение (в.16) к площадке dS_1 (с площадью $dl_2{\cdot}dl_3$), можем выразить скалярную компоненту $rot_1\,\mathbf{M}$ через частные производные по координатам (см. раздел III § 3 главы первой).

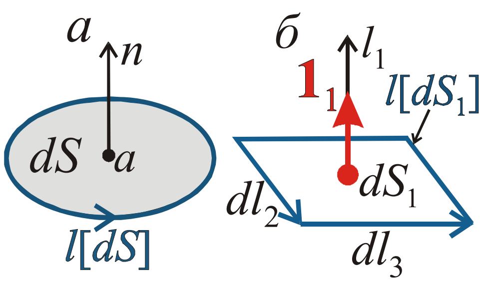


Рис. В.21.
К определению компонент $rot_n\,\mathbf{M}$ и $rot_1\,\mathbf{M}$ вектора rot **M**

В частности, в декартовых координатах, в которых $dl_2=dy$, $dl_3=dz$, $dS_1=dS_x=dy\cdot dz$, $\mathbf{1}_1=\mathbf{1}_x,\ldots$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_x{\cdot}M_x+\mathbf{1}_y{\cdot}M_y+\mathbf{1}_z{\cdot}M_z$, для скалярной и векторной компонент поля rot **M** по направлению оси X получаем:

$$rot_x\,\mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z},$$

$$\text{rot}_x\,\mathbf{M} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right).$$

Подобным образом можем определить две другие компоненты rot **M**. Складывая векторные компоненты, получаем выражение для rot **M** в декартовых координатах:

$$\text{rot}\,\mathbf{M} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(в.17)}$$

В тех областях пространства (на линиях, поверхностях), где rot $\mathbf{M}\neq 0$, находятся "вихри" поля **M** (источники поля **M** вихревого типа).

Пользуясь декартовой системой координат докажем, что векторное произведение оператора набла на вектор **M** $[\nabla\,\mathbf{M}]=\text{rot}\,\mathbf{M}$.

В соответствии с выражениями (в.17) и (в.11) векторное произведение

$[\nabla\ \mathbf{M}] = \left[\left\{\mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z\right\}\right]$. Принимая во внимание выражение (в.2) для векторного произведения векторов и учитывая, что $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_x] = 0$, $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_y] = \mathbf{1}_z$, $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_z] = -\mathbf{1}_y$, $[\mathbf{1}_y\ \mathbf{1}_x] = -\mathbf{1}_z$ и т. д., получаем:

$$[\nabla\ \mathbf{M}] = 0 + \mathbf{1}_z \frac{\partial M_y}{\partial x} - \mathbf{1}_y \frac{\partial M_z}{\partial x} - \mathbf{1}_z \frac{\partial M_x}{\partial y} + 0 + \mathbf{1}_x \frac{\partial M_z}{\partial y} + \mathbf{1}_y \frac{\partial M_x}{\partial z} - \mathbf{1}_x \frac{\partial M_y}{\partial z} + 0 =$$

$= \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)$, что совпадает с выражением (в.17) для rot **M**. Итак,

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = [\nabla\ \mathbf{M}]. \tag{в.18}$$

О потенциальных и соленоидальных векторных полях.

Выражения для производных rot **M** и div **M** составляют систему уравнений поля **M** в дифференциальной форме. Для (любого по физической природе) поля **M** в зависимости от того, равны или не равны эти производные нулю, применяют следующую терминологию.

Если $\operatorname{rot} \mathbf{M} \equiv 0$, $\operatorname{div} \mathbf{M} \neq 0$, то поле **M** – *безвихревое* (*потенциальное*).

Применяя здесь обозначение "≠0" будем понимать это так, что производная поля **M** не равна нулю хотя бы в некоторых областях пространства или точках (на линиях, поверхностях). В других областях или точках эта производная может быть равна нулю.

Если $\operatorname{rot} \mathbf{M} \neq 0$, $\operatorname{div} \mathbf{M} \equiv 0$, то поле **M** – *чисто вихревое* (*соленоидальное*). Иногда поле **M**, у которого $\operatorname{rot} \mathbf{M} \neq 0$, $\operatorname{div} \mathbf{M} \neq 0$, называют ("просто") вихревым.

В соответствии с *теоремой разложения Гельмгольца* ([Корн, Корн, 1970], с. 173 - 174) при выполнении некоторых ("не обременительных" для реальных физических полей) условий любое векторное поле $\mathbf{M}(a)$ может быть представлено в виде суммы:

$$\mathbf{M}(a) = \mathbf{M}_{\text{п}}(a) + \mathbf{M}_{\text{с}}(a), \tag{в.19}$$

где $\operatorname{rot} \mathbf{M}_{\text{п}}(a) \equiv 0$, $\operatorname{div} \mathbf{M}_{\text{с}}(a) \equiv 0$. То есть поле $\mathbf{M}(a)$ можно представить, как *сумму безвихревого поля* $\mathbf{M}_{\text{п}}$ *и чисто вихревого поля* $\mathbf{M}_{\text{с}}$.

в.8. О вторых пространственных производных

Вторые производные скалярного поля T

Выражения для этих производных в произвольной ортогональной системе координат приведены в разделах I - III § 5 главы первой.

Итак, первая пространственная производная скалярного поля $T(a)$ это векторное поле $\operatorname{grad} T(a)$. Понятно, что это векторное поле тоже имеет пространственные производные: $\operatorname{div}\operatorname{grad} T$ и $\operatorname{rot}\operatorname{grad} T$. Это – вторые пространственные производные скалярного поля T.

Получим выражения для пространственных производных *а*). $\operatorname{div}\operatorname{grad} T$, *б*). $\operatorname{rot}\operatorname{grad} T$ поля T в декартовой системе ортогональных координат x, y, z.

***а*).** В соответствии с выражениями (в.1), (в.10), (в.11), и учитывая, что скалярные произведения $(\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_x) = 1$, $(\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_y) = 0$, $(\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_z) = 0$ и т. д., получаем:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} T = (\nabla\ \nabla T) = \left(\left\{\mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}\right\}\right) =$$

$= \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 0 + 0 + 0 + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 0 + 0 + 0 + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. Итак, одна из вторых производных скалярного поля T в декартовых координатах:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} T = (\nabla\ \nabla T) = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \qquad \text{(в.20)}$$

Здесь ∇^2 – оператор Лапласа. В декартовых координатах

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad \text{(в.21)}$$

***б*).** В соответствии с выражениями (в.2), (в.10), (в.11), при учёте того, что векторные произведения $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_x] = 0$, $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_y] = \mathbf{1}_z$, $[\mathbf{1}_y\ \mathbf{1}_x] = -\mathbf{1}_z$ и т. д., получаем:

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad} T = [\nabla\ \nabla T] = \left[\left\{\mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}\right\}\right] =$$

$$= 0 + \mathbf{1}_z \frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} - \mathbf{1}_y \frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z} - \mathbf{1}_z \frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + 0 + \mathbf{1}_x \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} + \mathbf{1}_y \frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z} - \mathbf{1}_x \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} + 0 = 0,$$

то есть вторая производная скалярного поля T

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} T = 0. \qquad \text{(в.22)}$$

Вторые производные векторного поля M

Подробнее эти вопросы рассмотрены в разделах V - VI § 5 главы первой.

Вторые производные поля **M** это: 1) $\nabla^2\mathbf{M}$, 2) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{M}$, 3) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}$, 4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}$.

1). Производную $\nabla^2\mathbf{M}$ в ортогональных декартовых координатах x, y, z определяет следующее выражение:

$$\nabla^2\mathbf{M} = \mathbf{1}_x \nabla^2 M_x + \mathbf{1}_y \nabla^2 M_y + \mathbf{1}_z \nabla^2 M_z = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}\right). \qquad \text{(в.23)}$$

В (в.23) лапласианы ∇^2 скалярных декартовых компонент M_x, M_y, M_z ($\nabla^2 M_x$, $\nabla^2 M_y$, $\nabla^2 M_z$) определяют выражения, аналогичные формуле (в.20) для лапласиана $\nabla^2 T$ скалярного поля T.

2). Докажем, что вторая производная $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{M}$ равна нулю.

В соответствии с выражениями (в.1), (в.11), (в.15), (в.17), при учёте того что, скалярные произведения $(\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_x) = 1$, $(\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_y) = 0$, $(\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_z) = 0$ и т. д., получаем:

$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\ \mathbf{M} = (\nabla\ \ \operatorname{rot}\ \mathbf{M}) =$

$$=\left(\left\{\mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{1}_z\frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\right\}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)+0+0+0+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)+0+0+0+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y\,\partial z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 M_x}{\partial y\,\partial z}\right)=0.$$ Следовательно

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{M}=0. \qquad \text{(в.24)}$$

Получим выражения для вторых пространственных производных $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}$ в декартовых координатах x, y, z.

3). Для второй производной $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}$ в системе x, y, z в соответствии с равенствами (в.10), (в.11), (в.14) получаем:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}=\nabla(\operatorname{div}\mathbf{M})=\nabla(\nabla\,\mathbf{M})=\left\{\mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{1}_z\frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}=\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z}\right)+$$

$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}\right). \qquad \text{(в.25)}$$

4). Для второй производной $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}$ в системе x, y, z в соответствии с выражениями (в.11), (в.17), (в.18), при учёте того, что векторные произведения $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_x]=0$, $[\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_y]=\mathbf{1}_z$, $[\mathbf{1}_y\ \mathbf{1}_x]=-\mathbf{1}_z$ и т. д. имеем:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}=[\nabla\operatorname{rot}\mathbf{M}]=\left[\left\{\mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{1}_z\frac{\partial}{\partial z}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\right\}\right]=$$

$$=0+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2}\right)-\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y}\right)-\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z}\right)+0+$$

$$+\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}\right)-\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z}\right)+0.$$

Следовательно, в декартовых координатах

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right) +$$

$$+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}\right). \quad \text{(в.26)}$$

Докажем, что разность $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \nabla^2\mathbf{M}$. В соответствии с равенствами (в.25), (в.26) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} =$

$$= \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}\right) - \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right) +$$

$$-\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}\right) - \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right) +$$

$$+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}\right) +$$

$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2}\right) +$$

$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}\right)$$

При сравнении последнего выражения с равенством (в.23) видим, что

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \nabla^2\mathbf{M}. \quad \text{(в.27)}$$

Глава первая. Поле

Если каждой точке a области V соответствует некоторое значение величины $\mathcal{F}$, то имеем в этой области поле величины $\mathcal{F}$ или, короче, поле $\mathcal{F}$. В общем случае разным точкам a области V соответствуют разные значения величины $\mathcal{F}$, т. е. поле является *ф у н к ц и е й* (положения) точки. Точка a, в которой наблюдают (рассматривают) поле, т. е. фактически или мысленно определяют значение величины $\mathcal{F}$, называется точкой наблюдения поля; она является его аргументом: $\mathcal{F}=\mathcal{F}(a)$.

Физическим является поле $\mathcal{F}$, когда величина $\mathcal{F}(a)$ описывает некоторое физическое явление в пространстве (и времени); например, поле сил, действующих на электрические заряды, называют *э л е к т р и ч е с к и м п о л е м*.

Для исследования недр в разведочной геофизике применяют физические поля, распределенные в земной коре и над ней: гравитационное, магнитное, электрическое, электромагнитное, упругих колебаний и др. Геофизик создает поля для своих исследований или пользуется полями, существующими независимо от его деятельности. Он наблюдает эти поля в доступных областях пространства: на земной поверхности, над ней (в атмосфере) или под ней, на глубине (в море, в скважинах и т. д.). По результатам наблюдения он должен судить о геологических образованиях, недоступных для непосредственного изучения. Их исследование на расстоянии при помощи физических полей возможно благодаря зависимости распределения полей в пространстве и времени от физических свойств среды: её плотности, электропроводности, упругости и т. п. При этом важно, что свойства среды (горных пород) в какой-либо области пространства влияют на поле не только в этой области, но и на расстояниях от неё.

Для оптимальной постановки исследования недр с помощью физических полей и для правильного истолкования результатов наблюдения этих полей необходимо знать закономерности их связей со свойствами среды, овладеть физико-математическим аппаратом, выражающим эти связи и позволяющим рассчитывать поля по заданным геофизическим условиям.

§ 1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Будем рассматривать поля скалярные $T(a)$ и векторные $\mathbf{M}(a)$. В этой главе будем изучать закономерности этих полей вне зависимости от их физической природы. Определяя положение точки a ***радиусом-вектором*** $\mathbf{L}_{Oa}$ (с началом в некоторой точке O) или ***координатами*** ξ_1, ξ_2, ξ_3 этой точки, можно считать поле функцией радиуса-вектора или координат точки a. Систему координат будем считать правой, прямоугольной, в общем случае криволинейной, образованной тремя взаимно ортогональными семействами координатных линий l_1, l_2, l_3, по которым отсчитываются координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 1.1).

I. Определение поля

Значение скаляра T в какой-либо точке a определяет его абсолютная величина $|T(a)|$ и знак, а вектора **M** – его абсолютная величина $M(a)$ и направление: $\mathbf{M}=\mathbf{1}_M{\cdot}M(a)$, где $\mathbf{1}_M$ – единичный вектор по направлению вектора **M**. Примерами скалярных полей являются: поле давления в атмосфере, поле температуры или плотности вещества в литосфере, поле концентрации ионов в электролитической ванне или содержания какого-либо минерала в горной породе. Примерами векторных полей являются: поле скорости воды в реке, поле плотности потока тепла в земной коре, поле плотности электрического тока в проводнике. Если **M** – сила, приложенная в точке a, то поле называется силовым. Примерами силовых полей являются: поле сил тяжести, поле земного магнетизма, электромагнитное поле в земле – естественное или искусственно создаваемое с помощью электродов или других «задающих» устройств (петель, индукционных рамок, антенн).

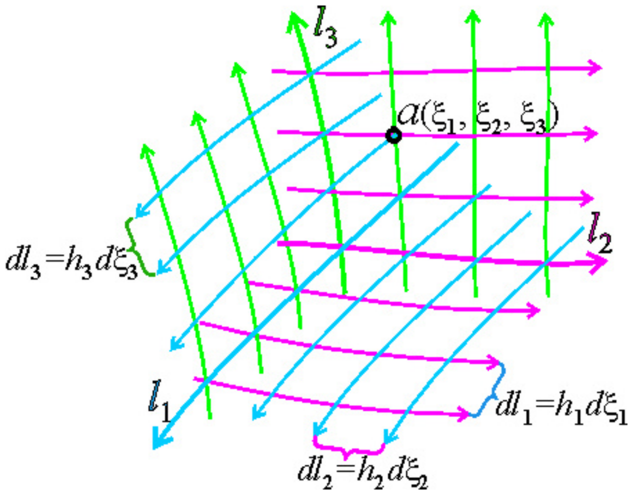


Рис. 1.1.
Криволинейная ортогональная система координат

Вектор **M** иногда называют напряженностью поля **M**. Силовое поле **M** иногда определяют как пространство, в котором действуют силы **M**. Существование этих сил поля иногда можно рассматривать как свойство, приобретаемое пространством при определённых условиях.

Соответствие между точками a области V и значениями, которые принимает функция $\mathcal{F}$ в этих точках, устанавливается различными способами.

1. Аналитическим выражением функции $\mathcal{F}(a)$, в области V, которое может быть представлено совокупностью *различных выражений для разных частей* области V.

2. Таблицами значений величины $\mathcal{F}$ соответствующих значениям координат точки a, взятым с достаточно малыми интервалами.

3. Графиками, изображающими зависимость величины $\mathcal{F}$ от положения точки a.

4. Построениями, иллюстрирующими распределение величины $\mathcal{F}$ в пространстве, например, поверхностями равных, значений этой величины.

Полезно представлять себе поле $\mathcal{F}$ в области V пространственно, в виде воображаемого множества точек этой области и соответствующих им значений величины $\mathcal{F}(a)$, указанных в этих точках (числами в скалярном поле T и стрелками в векторном поле **M**).

II. Компоненты векторного поля.

В соответствии с (в.3) Скалярную M_l и векторную $\mathbf{M}_l$ компоненты вектора M по направлению l определяют выражения:

$$M_l = M\cdot\cos(\mathbf{M},\, \mathbf{1}_l) = (\mathbf{M}\,\mathbf{1}_l), \quad \mathbf{M}_l = \mathbf{1}_l\cdot M_l,$$

где $(\mathbf{M}\,\mathbf{1}_l)$ - скалярное произведение, а $\mathbf{1}_l$ - единичный вектор (орт) по направлению l (рис. В.2). Знак компоненты M_l - положительный, когда угол $(\mathbf{M},\, \mathbf{1}_l)$ между вектором $\mathbf{M}$ и направлением l (направлением $\mathbf{1}_l$) - острый или равен нулю, и отрицательный, когда этот угол тупой или равен π.

Вектор $\mathbf{M}$ будем определять его векторными или скалярными компонентами по координатным направлениям l_1, l_2, l_3:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{1}_1\cdot M_1 + \mathbf{1}_2\cdot M_2 + \mathbf{1}_3\cdot M_3, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{1}_k\cdot M_k; \quad M_k = M\cdot\cos(\mathbf{M},\, \mathbf{1}_k) \qquad (k = 1,\, 2,\, 3); \tag{1.1'}$$

$\mathbf{1}_k$ – единичные векторы по координатным направлениям l_k (рис. В.4). Абсолютная величина M вектора $\mathbf{M}$ и его направление могут быть определены через компоненты M_k по формулам

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}, \quad \cos(\mathbf{M}, \mathbf{1}_k) = \frac{M_k}{M} \quad (k = 1,\, 2,\, 3).$$

Полагая $\mathbf{M} = \mathbf{1}_l$, получаем из (1.1), (1.1'):

$$\mathbf{1}_l = \mathbf{1}_1\cdot\cos(\mathbf{1}_l,\, \mathbf{1}_1) + \mathbf{1}_2\cdot\cos(\mathbf{1}_l,\, \mathbf{1}_2) + \mathbf{1}_3\cdot\cos(\mathbf{1}_l,\, \mathbf{1}_3). \tag{1.2}$$

При изучении поля $\mathbf{M}$ в точке p, лежащей на какой-либо поверхности S (рис. 1.2) или в точке a, расположенной вблизи этой поверхности у точки p,

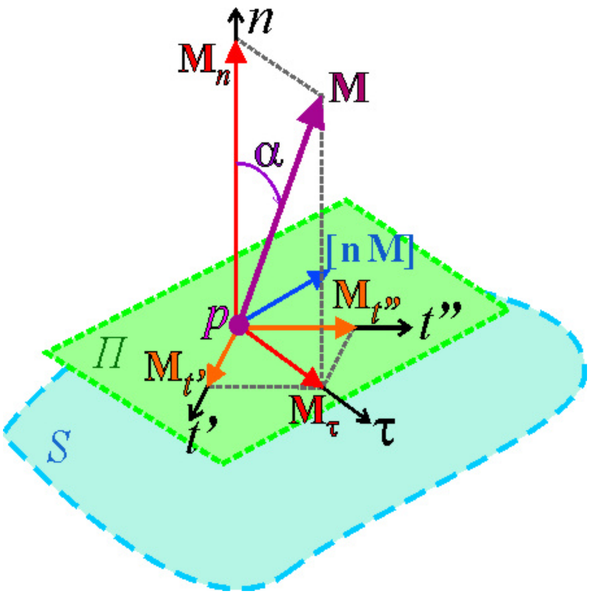


Рис. 1.2.
Компоненты поля **M** в точке p на поверхности S

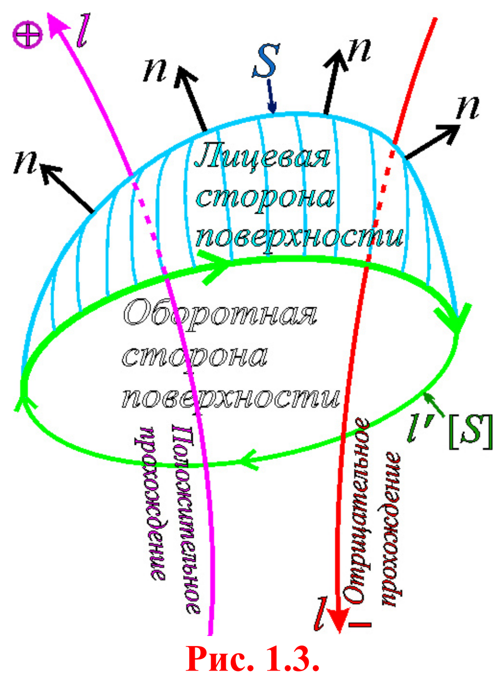


Рис. 1.3.
Стороны поверхности S и обход по её контуру $l'[S]$. Линии l, пронизывающие поверхность S (обхватываемые контуром $l'[S]$)

будем часто разлагать вектор $\mathbf{M}$ на нормальную ($\mathbf{M}_n$) и тангенциальные ($\mathbf{M}_\tau$, $\mathbf{M}_{t'}$, $\mathbf{M}_{t''}$) к поверхности S компоненты:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_\tau = \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_{t'} + \mathbf{M}_{t''}; \quad (1.3)$$

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{n}\cdot M_n, \quad M_n = (\mathbf{n}\ \mathbf{M}) = M\cdot\cos(\mathbf{M}, \mathbf{n}); \quad (1.3')$$

$$\mathbf{M}_\tau = \boldsymbol{\tau}\cdot M_\tau = [[\mathbf{n}\ \mathbf{M}]\ \mathbf{n}] = \mathbf{M}_{t'} + \mathbf{M}_{t''}, \quad M_\tau = M\cdot\cos(\mathbf{M}, \boldsymbol{\tau}); \quad (1.3'')$$

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{t}\cdot M_t,\ M_t = (\mathbf{t}\ \mathbf{M}) = M\cdot\cos(\mathbf{M}, \mathbf{t}) = (\mathbf{M}_\tau\ \mathbf{t}) = [[\mathbf{n}\ \mathbf{M}]\ \mathbf{n}] = ([[\mathbf{n}\ \mathbf{M}]\ \mathbf{n}]\ \mathbf{t}) = ([\mathbf{n}\ \mathbf{M}]\ [\mathbf{n}\ \mathbf{t}]). \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{1}_n$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}_\tau = [[\mathbf{n}\ \mathbf{1}_M]\ \mathbf{n}]$, $\mathbf{t} = \mathbf{1}_t$ – безразмерные единичные векторы по направлению нормали n и тангенциальным (касательным к поверхности S) направлениям τ, t; $\mathbf{M}_n$ и M_n – векторное и скалярное значения нормальной компоненты вектора $\mathbf{M}$; вектор $\mathbf{M}_\tau$ и скаляр M_τ – *полная тангенциальная компонента* вектора $\mathbf{M}$ (его проекция на плоскость Π, касательную к поверхности S в точке p); $\mathbf{M}_t$, M_t – векторное и скалярное значения компоненты $\mathbf{M}$ по произвольно взятому тангенциальному направлению t в плоскости Π; $\mathbf{M}_{t'}$ и $\mathbf{M}_{t''}$ – векторные компоненты $\mathbf{M}$ по двум взаимно перпендикулярным тангенциальным направлениям t' и t''. Очевидно, что векторное произведение $[\mathbf{n}\ \mathbf{M}_\tau] = [\mathbf{n}\ \mathbf{M}]$, $[\mathbf{n}\ \boldsymbol{\tau}]\cdot M_\tau = [\mathbf{n}\ \mathbf{1}_M]\cdot M$.

Тангенс угла α между направлением поля $\mathbf{M}$ и нормалью n к поверхности S определяет формула

$$\operatorname{tg}\alpha = M_\tau / M_n. \quad (1.5)$$

Нормаль n к поверхности S, разграничивающей две области пространства V_1 и V_2, будем в общем случае считать направленной от V_1 к V_2. В случае замкнутой поверхности $S[V]$, ограничивающей область V, обычно направляют нормаль n к $S[V]$ наружу относительно области V.

Если замкнутая линия l (или замкнутая поверхность S) ограничивает некоторый участок поверхности S (или область пространства V), то будем приписывать справа от l (или S), обозначение этого участка (или области), взятое в квадратные скобки.

III. Замечания, дополнения.

1. Место элемента объёма, поверхности, линии будем определять некоторой его точкой – «средней» точкой элемента или точкой, которую он содержит. При этом будем оставлять неопределённым положение этой точки в элементе. Имеется в виду, что достаточная малость размеров элемента позволяет пренебречь следствием любых перемещений этой точки в нём (или даже в ближайшей его окрестности). Аналогично следует понимать выражения «средняя линия», «среднее сечение» элемента.

Поверхность или линию будем обычно считать гладкой в окрестности рассматриваемой её точки: Гладкой называем поверхность (линию), в любой точке которой однозначно определяется нормаль (нормальная плоскость, касательная).

2. Ориентированный элементарный отрезок dl линии l (см. рис. В.2) определяет вектор

$$\mathbf{dl}=\mathbf{1}_l\cdot dl=\mathbf{dl}_1+\mathbf{dl}_2+\mathbf{dl}_3=\mathbf{1}_1\cdot dl_1+\mathbf{1}_2\cdot dl_2+\mathbf{1}_3\cdot dl_3, \tag{1.6}$$

где dl – абсолютная величина вектора $\mathbf{dl}$, равная длине отрезка; dl_k и $\mathbf{dl}_k=\mathbf{l}_k\cdot dl_k$ ($k=1, 2, 3$) – скалярные и векторные компоненты вектора $\mathbf{dl}$ по координатным направлениям (линиям) l_k.

Ориентированную элементарную площадку dS определяет имеющий размерность единицы площади вектор

$$\mathbf{dS}=\mathbf{n}\cdot dS=\mathbf{dS}_1+\mathbf{dS}_2+\mathbf{dS}_3=\mathbf{1}_1\cdot dS_1+\mathbf{1}_2\cdot dS_2+\mathbf{1}_3\cdot dS_3, \tag{1.6'}$$

где dS – абсолютная величина вектора $\mathbf{dS}$, равная площади площадки; $\mathbf{n}=\mathbf{1}_n$ – единичный вектор по нормали n к dS;

$$dS_k=dS\cdot\cos(\mathbf{dS}, \mathbf{1}_k) \text{ и } \mathbf{dS}_k=\mathbf{1}_k\cdot dS_k \tag{1.6''}$$

– скалярные и векторные компоненты вектора $\mathbf{dS}$ по координатным направлениям ($k=1, 2, 3$).

Координатные элементы координатных поверхностей S_k, т. е. площадки dS_k, ограниченные расположенными на бесконечно-малых расстояниях dl координатными линиями l_1, l_2, l_3, определяют векторы

$$\mathbf{dS}_1=\mathbf{1}_1\cdot dl_2\cdot dl_3,\ \ \mathbf{dS}_2=\mathbf{1}_2\cdot dl_3\cdot dl_1,\ \ \mathbf{dS}_3=\mathbf{1}_3\cdot dl_1\cdot dl_2, \tag{1.6'''}$$

а координатный элемент пространства, т. е. элемент dV, ограниченный координатными поверхностями, имеет объём $dV=dl_1\cdot dl_2\cdot dl_3$. Будем пользоваться тремя системами координат: декартовой x, y, z; цилиндрической r, φ, z; сферической R, θ, φ (см. раздел в.4).

3. Элементарное перемещение dl_k точки по координатной линии l_k связано с приращением $d\xi_k$ координаты ξ_k этой точки соотношением $dl_k=h_k\cdot d\xi_k$, где h_k – коэффициент Ламэ (см. рис. В.11).

В декартовой системе $\xi_1=x$, $\xi_2=y$, $\xi_3=z$,

$$h_1=h_x=1,\quad h_2=h_y=1,\quad h_3=h_z=1. \tag{1.7}$$

В цилиндрической системе $\xi_1=r$, $\xi_2=\varphi$, $\xi_3=z$,

$$h_1=h_r=1,\quad h_2=h_\varphi=r,\quad h_3=h_z=1. \tag{1.7'}$$

В сферической системе $\xi_1=R$, $\xi_2=\theta$, $\xi_3=\varphi$,

$$h_1=h_R=1,\quad h_2=h_\theta=R,\quad h_3=h_\varphi=R\cdot\sin\theta. \tag{1.7''}$$

Поэтому элементы dl координатных линий, координатные элементы dS поверхностей и координатные элементы dV пространства можем выразить через дифференциалы $d\xi_k$ следующим образом.

В декартовой системе x, y, z

$$dl_x=dx,\ dl_y=dy,\ dl_z=dz,\ \ dS_x=dy\cdot dz,\ dS_y=dz\cdot dx,\ dS_z=dx\cdot dy,\ dV=dx\cdot dy\cdot dz. \tag{1.8}$$

В цилиндрической системе r, φ, z

$$dl_r=dr,\quad dl_\varphi=r\cdot d\varphi,\quad dl_z=dz,\qquad dS_r=r\cdot d\varphi\cdot dz,\quad dS_\varphi=dz\cdot dr,\quad dS_z=r\cdot dr\cdot d\varphi,$$
$$dV=r\cdot dr\cdot d\varphi\cdot dz. \tag{1.8'}$$

В сферической системе R, θ, φ

$$dl_R=dR,\quad dl_\theta=R\cdot d\theta,\quad dl_\varphi=R\cdot\sin\theta\cdot d\varphi,$$
$$dS_R=R^2\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi,\quad dS_\theta=R\cdot\sin\theta\cdot d\varphi\cdot dR,\quad dS_\varphi=R\cdot dR\cdot d\theta,$$
$$dV=R^2\cdot\sin\theta\cdot dR\cdot d\theta\cdot d\varphi. \tag{1.8''}$$

4. Ориентацию заданной в пространстве линии l определяет выбор направления (положительного) по ней, а поверхности S ─ выбор направления её нормали n.

Неориентируемые (односторонние) поверхности здесь и в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

Различают две условно выбираемые стороны поверхности ─ *лицевую* и *оборотную*; нормаль ("положительную") считают направленной от оборотной стороны к лицевой.

Если l ─ ориентированные линии, пронизывающие поверхность S, то при определении числа их прохождений через, эту поверхность будем различать прохождения с разными знаками: положительные (⊕) ─ от оборотной стороны к лицевой и отрицательные (─) ─ в противоположном направлении (рис. 1.3). Аналогичного правила знаков будем придерживаться при определении числа поверхностей S, пересекающих линию l, т. е. пронизываемых ею.

5. Три направления ρ, μ, ν (рис. 1.4, *а*) и, в частности, три координатных направления образуют *право-* или *левовинтовую систему*, если соответственно правый или левый винт, вращаемый около первого из этих направлений (по порядку их записи) от второго из них к третьему (по меньшей из двух дуг между ними), перемещается по первому направлению. Аналогично определяются тройки векторов, образующие правые и левые системы (правые и левые тройки векторов). Правая система преобразуется в левую перестановкой (инверсией) двух рядом написанных направлений, либо изменением на противоположное одного из этих направлений. В дальнейшем будем говорить, что направление ρ образует с направлениями μ и ν правовинтовую (левовинтовую) систему, если тройка направлений ρ, μ, ν образует такую систему.

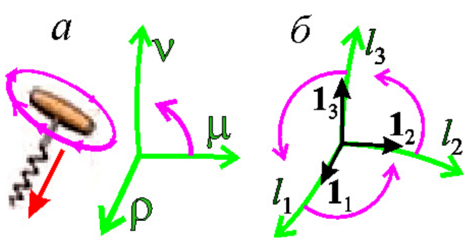


Рис. 1.4.
Правовинтовая система направлений ρ, μ, ν (*а*) или координатных направлений l_1, l_2, l_3 (*б*)

В разделе в.4 было приведено несколько иное определение правой системы координат. В такой системе координат при вращении орта $\mathbf{1}_1$ на наименьший угол в направлении орта $\mathbf{1}_2$ направление $\mathbf{1}_3$ определяет правило правого винта. То же относится к координатным направлениям l_1, l_2, l_3. Из сказанного выше следует, что если система координат с координатными направлениями l_1, l_2, l_3 – правовинтовая, то также правовинтовыми будут системы с координатными линиями l_2, l_3, l_1 или l_3, l_1, l_2. Поэтому, в частности, направления l_2, l_3, l_1 (или $l_2, l_3, \mathbf{1}_1$) образуют правовинтовую систему (см. рис. 1.6).

6. Обход по замкнутому контуру (контур, направление по контуру, ориентация по контуру) образует правовинтовую или левовинтовую систему с каким-либо направлением, если, смотря по этому направлению, мы видим обход по ходу стрелки часов или против её хода соответственно. На рис. 1.3 обход по контуру $l'[S]$ образует правовинтовую систему с нормалью n к поверхности S, которую этот контур ограничивает.

Два замкнутых контура охватывают друг друга (сцеплены), если каждый из них пронизывает нечётное число раз любую поверхность, опирающуюся на другой контур. Линию, не ограниченную с обеих сторон, часто следует считать замыкающейся на бесконечности.

7. Векторное поле **M** изображают с помощью *векторых линий* l_M, всюду направленных по полю: $\cos(\mathbf{M}, \mathbf{dl}_M)=1$, где $\mathbf{dl}_M = \mathbf{1}_M \cdot dl_M$ − элемент линии l_M (см. рис. В.2, В.5). Линия l_M может быть замкнутой или ограниченной точками обрыва g^M: началом $g^M{}_+$ и концом $g^M{}_-$. Если линия l_M продолжается до бесконечности, то в зависимости от обстоятельств можно считать, что её точки обрыва g^M находятся на бесконечности или что она замыкается на бесконечности.

Совокупность линий l_M, проведенных через точки некоторой (невекторной) линии l, образуют *векторную поверхность*. Если l − замкнутая линия (не расположенная на векторной поверхности), то получающаяся таким способом векторная поверхность ограничивает некоторую часть пространства, называемую *векторной трубкой*. Если вектор **M** означает скорость течения (жидкости, электричества), то векторные линии и трубки называют *токовыми линиями* и токовыми трубками. Векторные линии силового поля называют *силовыми линиями*.

8. Поле *однородно* в области V, если во всех точках этой области оно имеет одно и то же значение. Для векторного поля **M** это означает одно и то же направление и одну и ту же абсолютную величину. В системе x, y, z однородное векторное поле

$$\mathbf{M} = \mathbf{1}_x \cdot C_x + \mathbf{1}_y \cdot C_y + \mathbf{1}_z \cdot C_z, \tag{1.9}$$

где C_x, C_y, C_z − постоянные.

В однородном поле **M** векторные линии − взаимно параллельные прямые, а векторные поверхности − цилиндрические.

Поле, заданное на поверхности S (на линии l) как функция положения точки на ней, является двухмерным (одномерным). Поле в пространстве часто называют двухмерным (одномерным), если оно не зависит от одной (двух) из трёх координат.

Плоским называют поле, не меняющееся по направлению некоторой прямой l. В случае векторного поля часто к этому определению добавляют требование равенства нулю компоненты поля по направлению l − поле лежит в плоскости, нормальной к направлению l.

9. За исключением оговариваемых случаев, будем считать поле однозначной функцией точки.

Неоднозначность поля нельзя смешивать с его неопределённостью; совокупность различных значений поля в одной и той же точке может быть вполне определённой.

Будем считать поле непрерывным за исключением отдельных особых точек, линий или поверхностей разрыва поля. Непрерывность скалярного поля T в некоторой точке a_1 означает, что любому бесконечно малому смещению Δl точки a с положения a_1 по любому направлению l соответствует бесконечно малое изменение величины T. Если смещению Δl по некоторому направлению l

соответствует конечное или бесконечно большое изменение величины T, то мы говорим, что по этому направлению поле T в точке a_1 терпит разрыв, конечный или бесконечно большой соответственно.

Точка, при приближении к которой величина $|T|$ неограниченно возрастает, является точкой бесконечно большого разрыва поля T, так как разность значений T между этой точкой и соседней, приближающейся к ней точкой, является бесконечно-большой.

Кроме особых точек можно выделить иные необычные точки. Такой, например, является экстремальная точка, в которой величина T имеет значение, большее или меньшее, чем в любой соседней точке. Экстремальной будем называть также точку «минимакс», в которой величина T имеет и минимум и максимум в зависимости от направления линии, на которой определяют поведение поля T.

Поверхность S является *поверхностью разрыва скалярного поля* T, если бесконечно малому перемещению точки наблюдения a, переводящему эту точку с одной стороны поверхности S на другую её сторону, соответствует конечное или бесконечно большое изменение величины T. Иначе говоря, разность значений величины T в двух сливающихся, но расположенных с обеих сторон такой поверхности точках не равна нулю.

Разрыв поля T иногда полезно рассматривать как результат, мысленного сжатия области, в пределах которой величина T меняется очень интенсивно, но всё же непрерывно (см. § 4).

По поверхности или линии разрыва поля T величина T может меняться непрерывно.

Разрыв векторного поля $\mathbf{M}$ сводится к разрывам скаляров, которыми определяется вектор $\mathbf{M}$, например, его скалярных компонент.

В точке, которая по существу не является особой, может возникнуть разрыв или появиться неопределённость той или иной компоненты поля $\mathbf{M}$ в связи с характером применяемой системы координат. Возьмём системы x, y, z и r, φ, z с общей осью Z и началом отсчёта координаты φ от направления оси X. Во второй из них поле $\mathbf{M}$ имеет ненулевые компоненты $M_r(\varphi)=C\cdot\cos\varphi$ и $M_\varphi(\varphi)=-C\cdot\sin\varphi$ ($C=\text{const}$), значения которых становятся неопределёнными на оси Z ввиду неопределённости координаты φ на этой оси. На плоскости $x=0$ при $y=0$ имеем разрыв $M_r(0)-M_r(\pi)=2\cdot C$, на плоскости $y=0$ при $x=0$ – разрыв $M_\varphi(-\pi/2)-M_\varphi(\pi/2)=-2C$.

10. Поле $\mathcal{F}$ – переменное, если величина $\mathcal{F}$ зависит от времени t. В общем случае $\mathcal{F}=\mathcal{F}(a,t)$, причём зависимость величины $\mathcal{F}$ от t может быть различной в различных точках a. Ниже, до пятой главы включительно, будет идти речь только о постоянном поле, за исключением § 1 главы четвёртой.

В изданном в 1985-ом году Учебнике дифференцирование по времени t обозначено точкой над дифференцируемой величиной ($\dot{\mathcal{F}}$). Например, запись $\dot{\mathcal{F}}=0$ означает, что производная по времени t равна нулю и величина $\mathcal{F}$ или поле $\mathcal{F}$ – постоянны. Но, как показал многолетний опыт, при таком обозначении студенты часто не видят разницы между обозначениями $\dot{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$. Поэтому в этой ("электронной") версии Учебника будем пользоваться "стандартными" обозначениями: $\dfrac{d\mathcal{F}}{dt}=d\mathcal{F}/dt$ для производной функции $\mathcal{F}$ одного аргумента t и $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}=\partial\mathcal{F}/\partial t$ для частной производной (поля) $\mathcal{F}$ по времени t.

11. Характер изменения поля при малых перемещениях точки a в различных направлениях l (поведение поля в малой окрестности точки a) определяют пространственные производные (градиент, дивергенция, ротор, лапласиан и др.) аналогично тому, как поведение функции $y(x)$ на малом интервале изменения аргумента x определяет производная dy/dx этой функции по аргументу x. О пространственных производных и их применении для характеристики скалярных и векторных полей будет идти речь в следующих параграфах этой главы.

12. Можно ограничиться рассмотрением некоторой, достаточно обширной области пространства Θ, ограниченной со всех сторон замкнутой поверхностью $S[\Theta]$. Взяв в средней части этой области некоторую точку O в качестве начала отсчёта расстояний, можно было бы ограничиться рассмотрением только «конечных» точек пространства, т. е. точек, находящихся на ограниченных расстояниях от точки O. Однако часто бывает удобно считать размеры области Θ бесконечно большими, а её границу $S[\Theta]$ – бесконечно удалённой поверхностью Σ. Точки, находящиеся на поверхности Σ и вне неё, будем рассматривать как бесконечно удалённые (достаточно далёкие) от начала отсчёта O. Обычно будем представлять себе бесконечно удалённую поверхность Σ в виде сферической поверхности с центром в точке O, с радиусом R и с площадью $4\pi\cdot R^2$, где $R\to\infty$.

§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Изменение скаляра T в окрестности точки a по направлению l характеризует производная от T по этому направлению. Эта производная

$$\frac{\partial T}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta l}. \tag{1.10}$$

где ΔT – приращение скаляра T, соответствующее перемещению Δl точки a по направлению l. Производная $\partial T/\partial l$ является мерой интенсивности («быстроты») изменения величины T по направлению l. Она равна приращению величины T на единицу длины по этому направлению или, точнее приращению ΔT на пути Δl, отнесённому к единице длины этого пути.

Такое уточнение необходимо потому, что в пределах одной единицы длины производная $\partial T/\partial l$ может иметь различные значения. Обойтись, без этого уточнения можно, условившись, что при определении $\partial T/\partial l$ мы имеем в виду вспомогательную (дольную) единицу длины столь малую, чтобы можно было пренебречь изменением на ней значения этой производной. В аналогичных случаях, которые весьма часто будут в дальнейшем встречаться, будем иногда для простоты изложения опускать соответствующие уточнения.

Для определения значений производной от T по любому направлению l в какой-либо точке a и, следовательно, для характеристики поведения поля T в окрестности этой точки достаточны значения производных от T по трём произвольно взятым, взаимно перпендикулярным (координатным) направлениям l_1, l_2, l_3.

Действительно, величина T является функцией координат ξ_k точки наблюдения a, а эти координаты меняются при перемещении точки a по направлению l и, следовательно, являются функциями положения точки a на линии l. Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial l}=\frac{\partial T}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_1}{\partial l}+\frac{\partial T}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \xi_2}{\partial l}+\frac{\partial T}{\partial \xi_3}\cdot\frac{\partial \xi_3}{\partial l}=\sum_1^3\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\cdot\frac{1}{h_k}\cdot\frac{\partial l_k}{\partial l},$$

где $\partial l_k/\partial\xi_k = h_k$ – коэффициенты Ламэ. Но $\dfrac{\partial l_k}{\partial l}=\cos\left(\mathbf{1}_l,\mathbf{1}_k\right)$, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial l}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{h_k}\cdot\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\cdot\cos\left(\mathbf{1}_l,\mathbf{1}_k\right). \qquad (1.10')$$

При изучении поля T у какой-либо поверхности S рассматривают нормальную и тангенциальные к ней производные $\partial T/\partial n$ и $\partial T/\partial t$ т. е. производные по нормали n к поверхности S и по направлениям t (t', t'') в плоскости $П$, касательной к этой поверхности (см. рис. 1.2).

I. Градиент

Правую часть (1.10') можно рассматривать как скалярное произведение единичного вектора $\mathbf{1}_l$, определяемого формулой (1.2), на вектор с компонентами $\dfrac{1}{h_k}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial \xi_k}$. Обозначая этот вектор grad T, имеем согласно (1.10')

$$\partial T/\partial l=(\mathbf{1}_l\ \mathrm{grad}\ T)=grad_l\,T, \qquad (1.10'')$$

где

$$\mathrm{grad}\,T=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{1}_k\cdot\frac{\partial T}{\partial l_k}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\mathbf{1}_k}{h_k}\cdot\frac{\partial T}{\partial \xi_k} \qquad (1.11)$$

– градиент скалярного поля T.

Согласно (1.10'') производная от T по любому направлению равна компоненте вектора grad T по этому направлению. В частности,

$$\frac{\partial T}{\partial l_k}=\frac{1}{h_k}\cdot\frac{\partial T}{\partial \xi_k}=grad_k T. \qquad (1.10''')$$

Из изложенного следует, что значение вектора grad T в какой-либо точке определяет поведение поля T в окрестности этой точки по всем направлениям.

Полный дифференциал функции T

$$dT=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\cdot d\xi_k=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial l_k}\cdot dl_k.$$

Поэтому согласно (1.6), (1.10'') и (1.11)

$$dT=\left(\mathrm{grad}\,T\,\mathbf{dl}\right)=grad_l T\cdot dl=\frac{\partial T}{\partial l}\cdot dl. \qquad (1.11')$$

В соответствии с этим приращение $\Delta T = T'' - T'$ скаляра $T(a)$ при перемещении точки a из положения a' в положение a'' по направлению l на малое расстояние Δl определяет формула

$$\Delta T = T'' - T' = \frac{\partial T}{\partial l} \cdot \Delta l, \tag{1.11''}$$

которая следует непосредственно из определения (1.10) производной $\partial T/\partial l$.

Пусть $l_{\alpha\beta}$ – произвольно выбранный путь от точки α до точки β, dl – малые отрезки этого пути, а dT – соответствующие им приращения величины T. Согласно (1.11') и (1.11'')

$$\int\limits_{l_{\alpha\beta}} (\mathrm{grad}\, T\, \mathbf{dl}) = \int\limits_{l_{\alpha\beta}} dT = T_\beta - T_\alpha, \tag{1.12}$$

где T_α и T_β – значения T в точках α и β.

Считая скаляр T однозначной функцией положения точки a, имеем на *замкнутом пути* $l_{\alpha\alpha}$ согласно (1.12) приращение $T_\alpha - T_\alpha = 0$, т. е. сумма приращений однозначной функции $T(a)$ на замкнутом пути равна нулю. Из этого следует, что знаки всех этих приращений не могут быть одинаковыми и, следовательно, изменение однозначной функции T на замкнутом пути не может быть монотонным.

Согласно (1.7) - (1.7'') и (1.11) имеем:
в системе x, y, z

$$\mathrm{grad}\, T = \mathbf{1}_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{1.13}$$

в системе r, φ, z

$$\mathrm{grad}\, T = \mathbf{1}_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{1.13'}$$

в системе R, θ, φ

$$\mathrm{grad}\, T = \mathbf{1}_R \cdot \frac{\partial T}{\partial R} + \mathbf{1}_\theta \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{1}{R \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \tag{1.13''}$$

Правые части этих равенств можно рассматривать как произведения символического вектора

$$\nabla = \frac{\mathbf{1}_1}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{1}_2}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{1}_3}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{1}_k}{h_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \tag{1.14}$$

называемого *набла*, на скаляр T и представить вектор $\mathrm{grad}\, T$ как результат применения этого дифференциального оператора (Гамильтона) к скаляру T:

$$\mathrm{grad}\, T = \nabla T. \tag{1.14'}$$

Если скаляр T является функцией $T(\phi)$ скаляра (скалярного поля) $\phi(a)$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_k} = \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1.15}$$

где ξ_k – координаты точки a.

Следовательно, согласно (1.15)

$$\operatorname{grad} T(\phi) = \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \operatorname{grad} \phi. \qquad (1.15')$$

В точке, в которой по направлению l поле T терпит разрыв, имеем $|\partial T/\partial l| = \infty$. Поэтому в особых для поля T точках и на особых линиях и поверхностях вектор $\operatorname{grad} T$ теряет смысл.

Очевидно, что в особых точках поля T направления рассматриваемых ниже линий градиента ($\operatorname{grad} T$) становятся неопределёнными.

Поведение поля T у особой поверхности S характеризует разрыв функции T, т. е. разность $T^{(2)} - T^{(1)}$ значений скаляра T на сторонах S_2 и S_1 поверхности S, причём индексом "2" будем отмечать лицевую сторону поверхности S, а индексом "1" – её оборотную сторону (см. рис. 1.3).

II. Поверхности уровня

Поверхностью уровня, или уровенной поверхностью скаляра T, называют поверхность $S_{\text{ур}}$, во всех точках которой величина T имеет одно и то же значение.

В поле сил тяжести уровень спокойной воды совпадает с поверхностью равных значений скаляра, называемого потенциалом этого поля.

Через каждую обычную точку (не являющуюся в поле T особой или экстремальной) можно провести уровенную поверхность, положение которой определяется однозначно. Нормали $n_{\text{ур}}$ к поверхностям уровня $S_{\text{ур}}$ будем направлять в сторону увеличения скаляра T.

Производная от T по любому направлению, касательному к поверхности уровня, очевидно, равна нулю, следовательно, вектор $\operatorname{grad} T$ направлен по нормали $n_{\text{ур}}$ к поверхности уровня.

Согласно (1.11)

$$\operatorname{grad} T = \mathbf{n}_{\text{ур}} \cdot \frac{\partial T}{\partial n_{\text{ур}}}, \quad |\operatorname{grad} T| = \frac{\partial T}{\partial n_{\text{ур}}}, \text{ где } \mathbf{n}_{\text{ур}} = \mathbf{1}_{n_{\text{ур}}}, \qquad (1.16)$$

откуда в соответствии с (1.10")

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial n_{\text{ур}}} \cdot \cos\left(\mathbf{1}_l, \mathbf{n}_{\text{ур}}\right). \qquad (1.16')$$

Согласно (1.16), (1.16') градиентом скаляра T является вектор, имеющий направление наиболее интенсивного возрастания скаляра T, и абсолютную величину, равную приращению T на единицу длины по этому направлению. Линии, проведенные по направлениям нормалей $n_{\text{ур}}$, т. е. векторные линии l_M поля $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$, называют *линиями градиента*.

Из изложенного следует, что вектор $\operatorname{grad} T$ заменяет совокупность производных от T по трём координатным направлениям.

В области V, в которой $\operatorname{grad} T = 0$, имеем $T = C$, где C – постоянная, т. е. величина, не зависящая от положения точки a в области V. Вектором $\operatorname{grad} T$ поле T определяется с точностью до постоянной (до постоянного слагаемого) C:

$$\operatorname{grad}(T + C) = \operatorname{grad} T. \qquad (1.17)$$

Зная векторное поле $\operatorname{grad} T$ в какой-либо области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, и значение T в некоторой точке a_0 этой области, можно согласно (1.12) определить скалярное поле T во всей области V.

III. Двухмерный градиент

При изучении поля T, определяемого на некоторой поверхности S, т. е. двухмерного поля, можно пользоваться двухмерным градиентом, который будем обозначать $\operatorname{grad}^S T$. Аналогично (1.11), (1.16) и (1.16') имеем

$$\operatorname{grad}^S T = \mathbf{t}'\cdot\frac{\partial T}{\partial t'} + \mathbf{t}''\cdot\frac{\partial T}{\partial t''} = \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{yp}}\cdot\frac{\partial T}{\partial \nu_{\text{ур}}}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \nu_{\text{ур}}}\cdot\cos\left(\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{yp}}\right), \qquad (1.18)$$

где $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{yp}}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$ – единичные векторы, тангенциальные к поверхности S, причём вектор $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{yp}}$ нормален к линии уровня $l_{\text{ур}}$ скаляра T на поверхности S, $\mathbf{t}$ имеет произвольное направление, а $\mathbf{t}'$ и $\mathbf{t}''$ взаимно перпендикулярны.

§ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Векторное поле **M** характеризуют двумя первыми пространственными производными – *дивергенцией* и *ротором*, которые в системах координат могут быть выражены через девять производных по координатным направлениям от трёх скалярных компонент вектора **M** по этим направлениям.

Дивергенция вектора **M** – скаляр, обозначаемый $\operatorname{div}\mathbf{M}$, а ротор (вихрь) вектора **M** – вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\mathbf{M}$. Дивергенцию и ротор называют соответственно скалярной и векторной производными векторного поля. Как будет показано в § 6, дивергенция определяет характер изменения поля **M** по его направлению, а ротор – по поверхности, нормальной к направлению этого поля (точнее, его вихревой части; см. раздел I § 6). К выражениям для ротора и дивергенции придём, исходя из рассмотрения работы (напряжения) в поле **M** и потока вектора **M**.

I. Поток вектора

Потоком вектора **M** через элементарную площадку dS (см. рис. В.15, *а*) называют скалярное произведение

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}) = M_n\cdot dS = M\cdot dS\cdot\cos(\mathbf{M}, \mathbf{dS}),$$

в котором **M** – поле в средней точке a этой площадки; n – нормаль, направленная от оборотной стороны площадки к её лицевой стороне; M_n – компонента вектора **M** по нормали n.

Если в скалярном произведении $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS})$ вектор **M** есть скорость течения жидкости, то оно определяет поток жидкости через площадку, т. е. количество жидкости, проходящей через неё в единицу времени. Отсюда – название поток (скалярный поток) вектора **M** для произведения $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS})$, а также названия векторный поток вектора **M** для векторного произведения $[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]$ и поток скаляра T для произведения $T\cdot dS$.

Произведение $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS})$ имеет положительное значение, когда угол $(\mathbf{M}, \mathbf{dS})$ острый или равен нулю, и отрицательное, когда этот угол тупой или равен 180°. Следовательно, поток вектора **M** через площадку dS положителен, когда векторные линии проходят через эту площадку от оборотной стороны к лицевой стороне и отрицателен когда, они проходят через неё в обратном направлении (см. рис. 1.3).

Обозначая поток вектора **M** через поверхность S буквой ψ, имеем

$$\psi = \int_S (\mathbf{M}\,\mathbf{dS}) = \int_S M_n\,dS, \quad d\psi = (\mathbf{M}\,\mathbf{dS})\,. \tag{1.19}$$

Поток ψ представляет собой алгебраическую сумму потоков $d\psi$ через отдельные элементарные участки поверхности S (см. рис. В.15, *б*), а его знак, так же как и знак каждого из этих потоков $d\psi$, зависит от выбора лицевой стороны на поверхности S. Очевидно, что поток вектора **M** через векторную поверхность (поверхность векторной трубки) равен нулю (см. рис. 1.12).

При определении потока $\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{M}\,\mathbf{dS})$ через замкнутую поверхность $S[V]$ (с наружной нормалью n относительно области пространства V, которую ограничивает эта поверхность) положительные слагаемые $d\psi$ соответствуют элементам поверхности, на которых вектор **M** направлен наружу (из области V).

II. Напряжение, циркуляция

Скалярное произведение

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = M{\cdot}dl{\cdot}\cos(\mathbf{M},\,\mathbf{dl}) = h_1{\cdot}M_1{\cdot}d\xi_1 + h_2{\cdot}M_2{\cdot}d\xi_2 + h_3{\cdot}M_3{\cdot}d\xi_3 \tag{1.20}$$

вектора **M** в точке a на элемент **dl** пути dl, содержащий эту точку, будем называть *р а б о т о й* в поле **M** (или *н а п р я ж е н и е м* поля **M**) на пути dl. Работа (**M dl**) положительна, когда угол (**M**, **dl**) между направлением поля **M** и элемента пути **dl** острый, и отрицательна, когда этот угол тупой.

Если **M** – сила, с которой поле **M** действует на единичную точечную массу (см. главу вторую), то (**M dl**) – работа в поле сил **M** при перемещении такой массы по пути dl. Отсюда (условное) название работа для произведения (**M dl**) при любом векторе **M**.

Работу в векторном поле **M** на пути l_{ab} от точки a до точки b будем называть *н а п р я ж е н и е м* поля **M** на этом пути. Обозначая это напряжение $\mathcal{E}_{ab}$, имеем

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = \int_a^b M_l \cdot dl, \quad d\mathcal{E} = (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}). \tag{1.21}$$

В общем случае это напряжение зависит не только от положения точек a и b, но также от всего пути ("формы" пути) l_{ab} между точками a, b. Работы на различных участках пути l_{ab} могут иметь разные знаки, и величина $\mathcal{E}_{ab}$ равна алгебраической сумме этих работ. Знаки слагаемых и их суммы зависят от выбора направления на пути l_{ab}, которым определяется ориентация векторов **dl** по линии l_{ab}. Если путь l_{ab} совпадает с векторной линией l_M, то работы (**M dl**) на всех его элементах dl имеют один знак – положительный, если направления пути l_{ab} и векторной линии l_M одинаковы, и отрицательный в противном случае. Поэтому работа на любом отрезке dl векторной линии l_M не может быть равна нулю.

Напряжение поля **M** по замкнутой линии (контуру) l, обозначаемое $\oint\limits_l (\mathbf{M}\,\mathbf{dl})$, называют *циркуляцией вектора* **M** *по контуру* l. Очевидно, что циркуляция по (замкнутой) векторной линии l_M отлична от нуля.

III. Ротор

Ротор вектора **M** в точке a представляет собой вектор, скалярную компоненту которого по любому направлению ρ определяет формула

$$rot_\rho \mathbf{M} = \lim_{S_\rho \to 0} \left[\frac{1}{S_\rho} \oint\limits_{l[S_\rho]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) \right], \tag{1.22}$$

где $l[S_\rho]$ – замкнутый контур, расположенный на плоскости Π_ρ, проходящей через точку a нормально к направлению ρ, и образующий правовинтовую систему с этим направлением; S_ρ – площадь участка плоскости Π_ρ, ограниченного контуром $l[S_\rho]$ и содержащего точку a. Стремление площади S_ρ к нулю происходит при стягивании контура $l[S_\rho]$ (и ограничиваемого им участка S_ρ плоскости) к точке a.

Взяв в качестве участка плоскости Π_ρ элемент dS_ρ этой плоскости, содержащий точку a, либо координатную площадку dS_k, ортогональную координатной линии l_k, получаем

$$rot_\rho \mathbf{M} = \frac{1}{dS_\rho} \cdot \oint\limits_{l[dS_\rho]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}), \quad rot_k \mathbf{M} = \frac{1}{dS_k} \cdot \oint\limits_{l[dS_k]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) \;\; (k = 1,\, 2,\, 3). \tag{1.22'}$$

Вторая из формул (1.22') соответствует случаю, когда направление ρ совпадает с направлением координатной линии l_k. Умножая скалярные компоненты, определяемые этой формулой, на единичные векторы $\mathbf{1}_k$ и складывая эти произведения, получаем вектор rot **M**. По направлению L этого вектора его компонента, очевидно, имеет наибольшее значение, равное его абсолютной величине. Следовательно, если вращать площадку dS_ρ около точки a, в которой определяется компонента $rot_\rho \mathbf{M}$, то правая часть первой из формул (1.22') – формуле $(1.22')_1$ – должна принять наибольшее значение, равное |rot **M**|, когда направление ρ совпадает с направлением L вектора rot **M**. Считая, что контур $l[dS_l]$ образует правовинтовую систему с направлением L, для вектора rot **M** имеем

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \frac{\mathbf{1}_L}{dS_L} \cdot \oint\limits_{l[dS_L]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}). \tag{1.22''}$$

Из формулы $(1.22')_1$ можно получить *теорему Стокса*:

$$\int\limits_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{M}\,\mathbf{dS}) = \oint\limits_{l[S]} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}). \tag{1.23}$$

где $l[S]$ – замкнутый контур, ограничивающий поверхность S.

Действительно, разделим поверхность S_i на элементы dS_i , ограниченные контурами l_i. Границы $l_{i,\text{г}}$ краевых элементов $dS_{i,\text{г}}$, расположенных у границы $l[S]$, содержат участки $\Delta l_{i,\text{г}}$, совокупностью которых является эта граница (рис. 1.5). Составим для всех элементов dS_i равенства вида $(1.22')_1$. Суммируя эти равенства, умноженные на $\mathbf{dS}_i$, получим

$$\sum_i (\text{rot}\,\mathbf{M}\ \mathbf{dS}_i) = \sum_i \oint_{li} (\mathbf{M}\ \mathbf{dl})\ . \qquad (1.23')$$

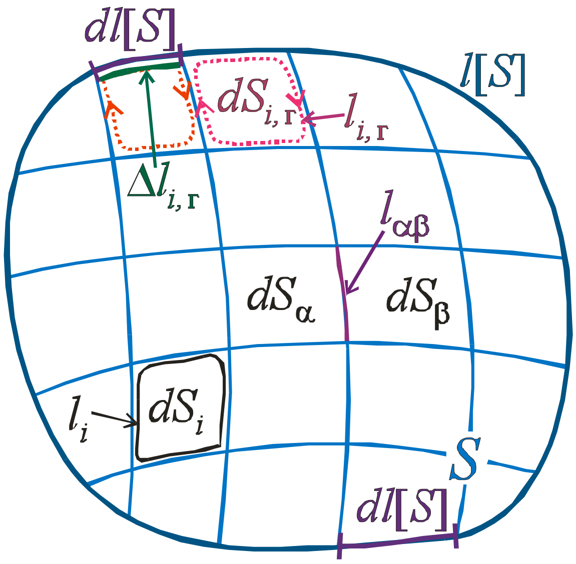


Рис. 1.5.
Схема, поясняющая вывод теоремы Стокса.
Элементы $dl[dS]$ совпадают с участками $\Delta l_{i,\text{г}}$ контуров $l_{i,\text{г}}$ краевых элементов $dS_{i,\text{г}}$

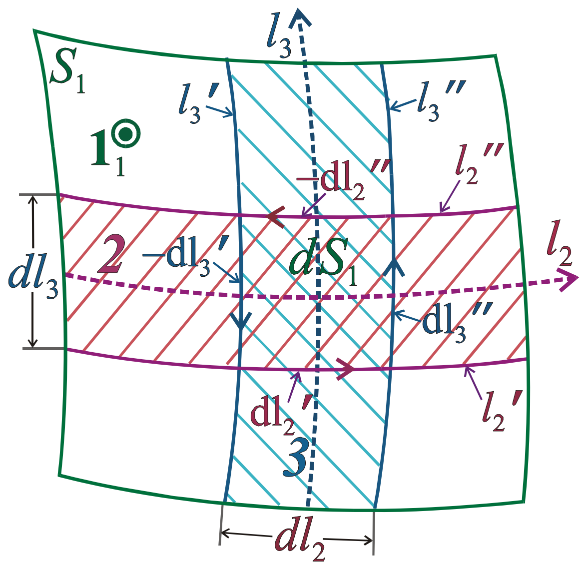


Рис. 1.6.
Полосы ***2*** и ***3*** на координатной поверхности S_1 и их общая площадка dS_1

Левая часть (1.23'), очевидно, равна левой части (1.23). Что же касается правой части (1.23'), то в её состав напряжение на линии $l_{\alpha\beta}$, разграничивающей смежные элементы dS_α и dS_β, входит дважды с разными знаками, так как в равенствах (1.22'), соответствующих этим элементам, обход по линии $l_{\alpha\beta}$ получается по взаимно противоположным направлениям. Поэтому ненулевые вклады в правую часть (1.23') вносят только напряжения по тем участкам $\Delta l_{i,\text{г}}$ контуров $l_{i,\text{г}}$, которые образуют контур (границу) $l[S]$ поверхности S. Следовательно, правая часть (1.23') совпадает с правой частью (1.23).

Согласно теореме Стокса поток вектора $\text{rot}\,\mathbf{M}$ через поверхность S равен циркуляции вектора $\mathbf{M}$ по контуру $l[S]$. Из (1.23) следует, что если на какой-либо поверхности S всюду $\text{rot}\,\mathbf{M}=0$, то по контуру $l[S]$ этой поверхности циркуляция равна нулю.

В правой части второго равенства в (1.22') можно взять в качестве dS_k координатную площадку с границей, состоящей из отрезков координатных линий, ортогональных линии l_k. Возьмём такую площадку на координатной поверхности S_1 , на которой, конечно, лежат координатные линии l_2 и l_3 (рис. 1.6).

При составлении этого рисунка было принято допущение, что показанные короткие отрезки линий l_2 и l_3 лежат в плоскости рисунка, на плоском участке координатной поверхности S_1. Тогда (для правой ортогональной системы координат) показанный на рис. 1.6 орт $\mathbf{1}_1$ направлен по нормали к плоскости рисунка, "к нам".

На поверхности S_1 выделим двумя парами координатных линий l'_2, l''_2 и l'_3, l''_3 две взаимно ортогональные полосы ***2*** и ***3*** элементарной ширины dl_3 и dl_2 со средними линиями l_2 и l_3 соответственно. В общем случае ширина полосы и компонента поля **M** по её ширине (по l_3 или l_2) меняется вдоль полосы и, следовательно, напряжения ($\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3$) и ($\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2$) на поперечниках dl_3 и dl_2 полос ***2*** и ***3*** являются соответственно функциями координат ξ_2 и ξ_3.

Пусть dS_1 – общая площадка полос ***2*** и ***3*** с контуром $l[dS_1]$, состоящим из следующих друг за другом элементов dl'_2, dl''_3, $-\mathrm{dl}''_2$, $-\mathrm{dl}'_3$. При этом направление "обхода" контура по линии $l[dS_1]$ (против часовой стрелки) образует правовинтовую систему с направлением координатной линии l_1 (см. рис. 1.4, 1.6). Тогда согласно (1.22') скалярная компонента

$$rot_1\,\mathbf{M} = \frac{1}{dl_2 \cdot dl_3} \cdot \left[(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)' + (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)'' - (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)'' - (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)'\right], \qquad (1.24)$$

где $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)'$ и $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)''$ – значения функции ($\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2$) на элементах dl'_2 и dl''_2; $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)'$ и $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)''$ – значения функции ($\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3$) на элементах dl'_3 и dl''_3.

Принимая во внимание, что

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)'' - (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)' = \frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)}{\partial \xi_3} d\xi_3 = \frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_2)}{\partial l_3} dl_3, \qquad (1.24')$$

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)'' - (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)' = \frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}_3)}{\partial l_2} dl_2, \qquad (1.24'')$$

получаем

$$rot_1\,\mathbf{M} = \frac{1}{dl_2 dl_3}\left[\frac{\partial(\mathbf{Mdl}_3)}{\partial l_2} dl_2 - \frac{\partial(\mathbf{Mdl}_2)}{\partial l_3} dl_3\right] = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(M_3 h_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(M_2 h_2)}{\partial \xi_3}\right], (1.25)$$

Аналогично для двух других скалярных компонент по координатным линиям l_2 и l_3 получаем:

$$rot_2\,\mathbf{M} = \frac{1}{dl_3 dl_1}\left[\frac{\partial(\mathbf{Mdl}_1)}{\partial l_3} dl_3 - \frac{\partial(\mathbf{Mdl}_3)}{\partial l_1} dl_1\right] = \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(M_1 h_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial(M_3 h_3)}{\partial \xi_1}\right], (1.25')$$

$$rot_3\,\mathbf{M} = \frac{1}{dl_1 dl_2}\left[\frac{\partial(\mathbf{Mdl}_2)}{\partial l_1} dl_1 - \frac{\partial(\mathbf{Mdl}_1)}{\partial l_2} dl_2\right] = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(M_2 h_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(M_1 h_1)}{\partial \xi_2}\right], (1.25'')$$

Вектор $\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \mathbf{1}_1 \cdot rot\,\mathbf{M}_1 + \mathbf{1}_2 \cdot rot\,\mathbf{M}_2 + \mathbf{1}_2 \cdot rot\,\mathbf{M}_3$. Воспользовавшись определителем 3-го порядка, представим выражение для вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$ в следующем виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \mathbf{1}_1 h_1 & \mathbf{1}_2 h_2 & \mathbf{1}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 M_1 & h_2 M_2 & h_3 M_3 \end{vmatrix}. \tag{1.26}$$

Определитель 3-го порядка можем представить как сумму произведений элементов строки или столбца на соответствующие определители 2-го порядка (миноры). В качестве таких элементов возьмём векторы в первой строке определителя в (1.26). В противном случае пришлось бы дифференцировать по координатам ξ_k векторы $\mathbf{1}_k$. Об особенностях дифференцирования векторов по координатам в криволинейных системах координат будет сказано ниже (в разделе IV § 9).

В соответствии с (1.7) - (1.7") и (1.26)

в системе x, y, z

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{1}_x\left[\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right] + \mathbf{1}_y\left[\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right] + \mathbf{1}_z\left[\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right]; \tag{1.27}$$

в системе r, φ, z

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \frac{1}{r}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{1}_\varphi \cdot r & \mathbf{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M_r & r\cdot M_\varphi & M_z \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{1}_r\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial z}\right] + \mathbf{1}_\varphi\left[\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}\right] + \mathbf{1}_z\left[\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial (r\cdot M_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi}\right)\right]; \tag{1.27'}$$

в системе R, θ, φ

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \frac{1}{R^2\cdot\sin\theta}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{1}_R & \mathbf{1}_\theta \cdot R & \mathbf{1}_\varphi \cdot R\sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ M_R & R\cdot M_\theta & R\sin\theta\cdot M_\varphi \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{1}_R}{R\cdot\sin\theta}\cdot\left[\frac{\partial(\sin\theta\cdot M_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial\varphi}\right] +$$

$$+ \frac{\mathbf{1}_\theta}{R}\cdot\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial M_R}{\partial\varphi} - \frac{\partial(R\cdot M_\varphi)}{\partial R}\right] + \frac{\mathbf{1}_\varphi}{R}\cdot\left[\frac{\partial(R\cdot M_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial M_R}{\partial\theta}\right]. \tag{1.27"}$$

Правую часть (1.27) можно рассматривать как векторное произведение

$$\left[\left(\mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{1}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\mathbf{1}_x M_x+\mathbf{1}_y M_y+\mathbf{1}_z M_z\right)\right]=[\nabla\mathbf{M}]$$

символического вектора ∇ на вектор **M**; следовательно,

$$\operatorname{rot}\mathbf{M}=[\nabla\,\mathbf{M}] \tag{1.28}$$

Из (1.25) - (1.27") следует, что нормальная компонента вектора rot **M** теряет смысл (обращается в бесконечность) на поверхности S, на которой терпит разрыв тангенциальная компонента (M_τ, M_t) вектора **M**.

IV. Дивергенция

Дивергенцию поля **M** в точке a определяет формула

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\lim_{V\to 0}\left[\frac{1}{V}\cdot\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{M}\,\mathbf{dS})\right]=\lim_{V\to 0}\left[\frac{1}{V}\cdot\oint\limits_{S[V]}M_n dS\right], \tag{1.29}$$

в которой V – объём произвольно взятой области V, содержащей точку a; $S[V]$ – замкнутая поверхность, ограничивающая область V. Стремление объёма V к нулю совершается стягиванием поверхности $S[V]$ к точке a, а нормаль n к этой поверхности направленна наружу (относительно области V). Согласно (1.29) в средней точке a объёмного элемента dV, ограничиваемого поверхностью $S[dV]$,

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{dV}\cdot\oint\limits_{S[dV]}(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}), \tag{1.29'}$$

т. е. дивергенция вектора **M** в точке a представляет собой поток вектора **M** через замкнутую поверхность $S[dV]$, ограничивающую окрестность dV точки a, отнесённый к единице объёма этой окрестности.

Из (1.29') можно получить *теорему Гаусса – Остроградского*

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{M}\,dV=\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}), \tag{1.30}$$

где $S[V]$ – замкнутая поверхность, ограничивающая область V.

Разделим область V на элементы dV_i, ограниченные поверхностями S_i. Границы S_i краевых элементов dV_i, расположенных у границы $S[V]$, содержат участки dS, совокупностью которых является эта граница. Составим для всех элементов dV_i равенства вида (1.29'). Умножая их на dV_i и суммируя, получаем равенство

$$\sum_i \operatorname{div}\mathbf{M}\,dV_i=\sum_i\oint\limits_{S_i}(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}), \tag{1.30'}$$

в котором левая часть совпадает с левой частью (1.30). Что же касается правой части (1.30'), то в её состав поток вектора **M** через границу $S_{\alpha\beta}$ (аналогичную линии $l_{\alpha\beta}$ между dS_α и dS_β на рис. 1.5) между соседними элементами dV_α и dV_β входит дважды, при противоположных направлениях нормали к поверхности $S_{\alpha\beta}$ (наружу из областей dV_α и dV_β). Получаются два потока через $S_{\alpha\beta}$, сумма которых равна нулю. Поэтому ненулевые вклады в правую часть (1.30') вносят только потоки через участки dS границ S_i, образующие границу $S[V]$ области V. Следовательно, правая часть (1.30') совпадает с правой частью (1.30).

Согласно теореме Гаусса - Остроградского (1.30) поток вектора **M** через замкнутую поверхность $S[V]$ равен интегралу дивергенции этого вектора, взятому по области V, ограниченной поверхностью $S[V]$, если во всех точках этой области div **M** имеет смысл.

Из (1.30) следует, что если в какой-либо области V всюду div $\mathbf{M}=0$, то поток вектора **M** через поверхность $S[V]$, ограничивающую эту область, равен нулю.

В правой части (1.29') в качестве области dV можно взять координатный элемент пространства, ограниченный координатными площадками dS_k.

Координатными поверхностями S_2', S_2'', S_3', S_3'' выделим из пространства координатную трубку со средней линией l_1 и с поперечным сечением dS_1 (рис. 1.7). Площадь этого сечения и нормальная (к dS_1) компонента вектора **M** на нём меняются вдоль трубки, и, следовательно, поток $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_1)$ является функцией координаты ξ_1 по линии l_1.

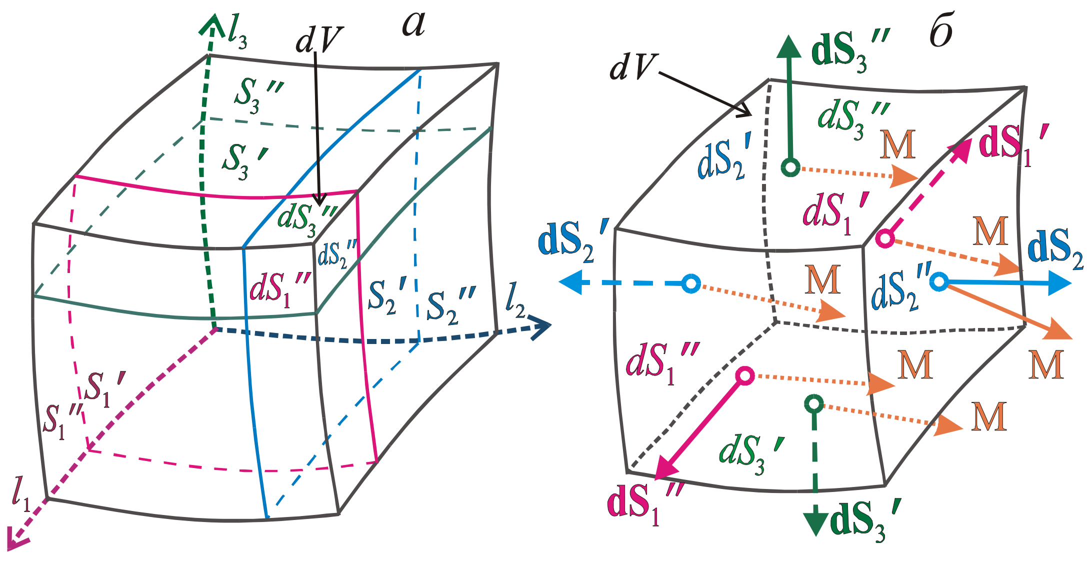


Рис. 1.7.

Схема, поясняющая вывод выражения (1.32') для дивергенции.
Общий элемент dV трёх взаимно ортогональных координатных трубок (*а*);
грани dS элемента dV и векторы **M** в их центрах (*б*)

Аналогично можно представить потоки $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_2)$ и $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_3)$ через поперечные сечения координатных трубок со средними линиями l_2 и l_3 как функции координат ξ_2 и ξ_3. Пусть dV – общий элемент объёма трёх таких взаимно ортогональных координатных трубок, а его грани – площадки dS_k', dS_k'' $(k=1, 2, 3)$.

Применяя к элементу dV формулу (1.29') и учитывая, что нормали на его поверхности $S[dV]$ следует направлять наружу (по отношению к dV), имеем

$$\mathrm{div}\mathbf{M} = \frac{1}{dV}\cdot\sum_{1}^{3}\left[(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)'' - (\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)'\right], \tag{1.31}$$

где $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)'$ и $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)''$ – значения функции $(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)$, соответствующие сечениям dS_k' и dS_k'' трубки со средней линией l_k. Принимая во внимание, что

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)''-(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)'=\frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)}{\partial\xi_k}d\xi_k=\frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_k)}{\partial l_k}dl_k,$$

получаем из (1.31)

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{dS_1}\frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_1)}{\partial l_1}+\frac{1}{dS_2}\frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_2)}{\partial l_2}+\frac{1}{dS_3}\frac{\partial(\mathbf{M}\,\mathbf{dS}_3)}{\partial l_3} \qquad (1.31')$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{dl_1 dl_2 dl_3}\left[\frac{\partial(dl_2 dl_3 M_1)}{\partial l_1}dl_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(dl_3 dl_1 M_2)}{\partial l_2}dl_2+\frac{\partial(dl_1 dl_2 M_3)}{\partial l_3}dl_3\right], \qquad (1.31'')$$

то есть

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 M_1)}{\partial\xi_1}+\frac{\partial(h_3 h_1 M_2)}{\partial\xi_2}+\frac{\partial(h_1 h_2 M_3)}{\partial\xi_3}\right]. \qquad (1.32)$$

В системе x, y, z

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}, \qquad (1.33)$$

в системе r, φ, z

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{r}\cdot\left[\frac{\partial(r\cdot M_r)}{\partial r}+\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}+r\cdot\frac{\partial M_z}{\partial z}\right], \qquad (1.33')$$

в системе R, θ, φ

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{R^2\cdot\sin\theta}\cdot\left[\sin\theta\cdot\frac{\partial(R^2\cdot M_R)}{\partial R}+R\cdot\frac{\partial(\sin\theta\cdot M_\theta)}{\partial\theta}+R\cdot\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}\right], \qquad (1.33'')$$

Правую часть (1.33) можно рассматривать как скалярное произведение

$$\left(\left[\mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{1}_z\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\mathbf{1}_x M_x+\mathbf{1}_y M_y+\mathbf{1}_z M_z\right]\right)$$

символического вектора ∇ на вектор $\mathbf{M}$. Следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=(\nabla\,\mathbf{M}). \qquad (1.34)$$

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Выведем соотношения, аналогичные теореме Гаусса – Остроградского, и некоторые выражения для объёмных, двухмерных и поверхностных производных.

I. Градиент и поток скаляра

Пусть $S[dV]$ – поверхность координатного элемента объёма $dV = dx{\cdot}dy{\cdot}dz$ с нормалями, направленными наружу. Её грани в векторизованном виде

$$\mathbf{dS}'_x = -\mathbf{1}_x \cdot dy \cdot dz, \quad \mathbf{dS}'_y = -\mathbf{1}_y \cdot dz \cdot dx, \quad \mathbf{dS}'_z = -\mathbf{1}_z \cdot dx \cdot dy,$$

$$\mathbf{dS}''_x = \mathbf{1}_x \cdot dy \cdot dz, \quad \mathbf{dS}''_y = \mathbf{1}_y \cdot dz \cdot dx, \quad \mathbf{dS}''_z = \mathbf{1}_z \cdot dx \cdot dy.$$

Обозначив через $T'(x)$, $T'(y)$, $T'(z)$, $T''(x)$, $T''(y)$, $T''(z)$ значения T в центрах этих граней, имеем

$$\oint\limits_{S[dV]} T\,\mathbf{dS} = \mathbf{1}_x\left[T''(x) - T'(x)\right]dy\,dz + \mathbf{1}_y\left[T''(y) - T'(y)\right]dz\,dx +$$

$$+\mathbf{1}_z\left[T''(z) - T'(z)\right]dx\,dy = \mathbf{1}_x\frac{\partial T}{\partial x}dV + \mathbf{1}_y\frac{\partial T}{\partial y}dV + \mathbf{1}_z\frac{\partial T}{\partial z}dV.$$

Следовательно, согласно (1.13),

$$\operatorname{grad} T = \frac{1}{dV}\oint\limits_{S[dV]} T\,\mathbf{dS} \text{ или } \operatorname{grad} T = \lim_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\oint\limits_{S[V]} T\,\mathbf{dS}\right). \tag{1.35}$$

От равенства (1.35) можно перейти к аналогичному (1.30) равенству

$$\int\limits_V \operatorname{grad} T\,dV = \oint\limits_{S[V]} T\,\mathbf{dS}, \tag{1.36}$$

правая часть которого является потоком скаляра T через поверхность $S[V]$.

Для получения (1.36) мы, как и при выводе (1.30), разделим область V на элементы dV_i, ограниченные поверхностями S_i. Границы S_i краевых элементов dV_i (расположенных непосредственно у границы $S[V]$ области V) содержат элементы dS, совокупность которых составляет эту границу. Составим для всех элементов dV_i равенства $(1.35)_1$. Сложив эти равенства, умноженные на соответственные объёмы dV_i, получим

$$\sum_i \operatorname{grad} T\,dV = \sum_i \oint\limits_{S_i} T\,\mathbf{dS}. \tag{1.36'}$$

Левая часть (1.36') равна левой части (1.36). Что же касается правой части (1.36'), то в её состав поток скаляра T через границу $S_{\alpha\beta}$ между соседними элементами dV_α и dV_β входят дважды: один раз как поток через участок поверхности $S[dV_\alpha]$ с нормалью, направленной в область dV_β, а другой – как поток через участок поверхности $S[dV_\beta]$ с нормалью, направленной в область dV_α. Отчасти иллюстрацией к сказанному может служить рис. 1.5. Сумма таких двух потоков, очевидно, равна нулю. Из этого следует, что ненулевой вклад в сумму потоков через поверхности S_i вносят только потоки через участки поверхностей краевых элементов dV_i, являющиеся элементами границы $S[V]$ области V. Но совокупность этих потоков представляет собой поток через поверхность $S[V]$, следовательно, равенство (1.36') сводится к (1.36).

II. Ротор и векторный поток

Обозначая через $\mathbf{M}'(x)$, $\mathbf{M}'(y)$, $\mathbf{M}'(z)$, $\mathbf{M}''(x)$, $\mathbf{M}''(y)$, $\mathbf{M}''(z)$ значения вектора $\mathbf{M}$ в центрах граней dS_x', dS_y', dS_z', dS_x'', dS_y'', dS_z'' координатного элемента объёма $dV = dx\cdot dy\cdot dz$, имеем

$$\oint\limits_{S[dV]}[\mathbf{M}\,\mathbf{dS}] = \left[\left(\mathbf{M}''(x)-\mathbf{M}'(x)\right)\mathbf{1}_x\right]dy\,dz + \left[\left(\mathbf{M}''(y)-\mathbf{M}'(y)\right)\mathbf{1}_y\right]dz\,dx +$$

$$+\left[\left(\mathbf{M}''(z)-\mathbf{M}'(z)\right)\mathbf{1}_z\right]dx\,dy =$$

$$=\left\{\left[\mathbf{1}_y\,\mathbf{1}_x\right]\left(M_y''(x)-M_y'(x)\right)+\left[\mathbf{1}_z\,\mathbf{1}_x\right]\left(M_z''(x)-M_z'(x)\right)\right\}dy\,dz+$$

$$+\left\{\left[\mathbf{1}_z\,\mathbf{1}_y\right]\left(M_z''(y)-M_z'(y)\right)+\left[\mathbf{1}_x\,\mathbf{1}_y\right]\left(M_x''(y)-M_x'(y)\right)\right\}dz\,dx+$$

$$+\left\{\left[\mathbf{1}_x\,\mathbf{1}_z\right]\left(M_x''(z)-M_x'(z)\right)+\left[\mathbf{1}_y\,\mathbf{1}_z\right]\left(M_y''(z)-M_y'(z)\right)\right\}dx\,dy=$$

$$=\left[\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial M_x}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial x}\right)+\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial M_y}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial y}\right)+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial M_z}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial z}\right)\right]dV.$$

Следовательно, согласно (1.27)

$$\mathrm{rot}\mathbf{M} = -\frac{1}{dV}\oint\limits_{S[dV]}\left[\mathbf{M}\ \mathbf{dS}\right],\quad \mathrm{rot}\mathbf{M} = \lim_{V\to 0}\left[\frac{1}{V}\oint\limits_{S[V]}\left[\mathbf{dS}\ \mathbf{M}\right]\right], \tag{1.37}$$

где $[\mathbf{dS}\ \mathbf{M}]$ – векторный поток вектора $\mathbf{M}$ через площадку $\mathbf{dS}$.

Из (1.37) можно получить аналогичное (1.30) соотношение

$$\int\limits_V \mathrm{rot}\mathbf{M}\,dV = \oint\limits_{S[V]}\left[\mathbf{dS}\ \mathbf{M}\right]. \tag{1.38}$$

Для этого, повторяя вывод соотношения (1.30), надо заменить равенства вида (1.29') равенствами вида $(1.37)_1$.

III. Двухмерные производные

От выражений (1.29), $(1.35)_2$ и $(1.37)_2$ для трёхмерных производных div $\mathbf{M}$, grad T и rot $\mathbf{M}$ можно перейти к аналогичным выражениям для двухмерных производных $\mathrm{div}^S\mathbf{M}_\tau$, $\mathrm{grad}^S T$ и $\mathrm{rot}^S\mathbf{M}_\tau$, т. е. для дивергенции, градиента и ротора от величин, рассматриваемых как функции точки a на поверхности S. Заменяя в (1.29) трёхмерную область V участком ΔS поверхности S, на которой задано поле тангенциального к ней вектора $\mathbf{M}_\tau$, а границу $S[V]$ области V – контуром (границей) $l[\Delta S]$ участка ΔS, получаем определение *двухмерной дивергенции*:

$$\mathrm{div}^S\mathbf{M}_\tau = \lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l[\Delta S]}\left(\mathbf{M}_\tau\,\nu\right)dl\right] = \lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l[\Delta S]}M_\nu\,dl\right], \tag{1.39}$$

где $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{1}_\nu$ – единичная нормаль к линии $l[\Delta S]$, лежащая на поверхности S (в плоскости Π, касательной к этой поверхности) и направленная наружу относительно участка ΔS;

$$\mathbf{M}_\tau=\mathbf{M}_\nu+\mathbf{M}_l,\quad M_\nu=(\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{M}_\tau),\quad M_l=(\mathbf{1}_l\,\mathbf{M}_\tau),\tag{1.40}$$

а $\mathbf{1}_l$ – единичный вектор по касательной к линии $l[\Delta S]$.

Из $(1.35)_2$ аналогично получаем определение *двухмерного градиента* (см. разд. III § 2):

$$\operatorname{grad}^S T=\lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{1}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]}\boldsymbol{\nu}T\,dl\right],\quad \left[\mathbf{1}_n\operatorname{grad}^S T\right]=\lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{1}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]}T\,\mathbf{dl}\right].\tag{1.41}$$

В $(1.41)_2$ предполагается, что обход по контуру $l[\Delta S]$ образует правовинтовую систему с нормалью n к поверхности S и, следовательно,

$$[\mathbf{n}\,\boldsymbol{\nu}]=[\mathbf{1}_n\,\mathbf{1}_\nu]=\mathbf{1}_l.\tag{1.40'}$$

Из $(1.37)_2$ получаем определение *двухмерного ротора*:

$$\operatorname{rot}^S\mathbf{M}_\tau=\lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{1}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]}[\boldsymbol{\nu}\mathbf{M}_\tau]dl\right]=\lim_{\Delta S\to 0}\left[\frac{\mathbf{n}}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]}M_l\,dl\right],\tag{1.42}$$

потому что согласно $(1.40)_1$

$$[\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{M}_\tau]=[\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{M}_\nu]+[\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{M}_l]=[\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{1}_l]\cdot M_l=\mathbf{n}\cdot M_l.\tag{1.40''}$$

От (1.39), (1.41), (1.42) можно перейти к соотношениям вида (1.30), (1.36), (1.38) для поля на поверхности. Например, из (1.39) и (1.41) получаем

$$\int_S \operatorname{div}^S\mathbf{M}_\tau dS=\oint_{l[S]}\left(\mathbf{M}_\tau[\mathbf{dl}\,\mathbf{n}]\right),\quad \int_S[\mathbf{dS}\,\nabla T]=\oint_{l[S]}T\,\mathbf{dl}\,.\tag{1.41'}$$

так как $[\mathbf{dS}\operatorname{grad}T]=[\mathbf{n}\operatorname{grad}^S T]\cdot dS$.

IV. Поверхностные производные

Вернёмся к полю в трёхмерном пространстве и допустим, что точка a находится на поверхности S, на которой возможен разрыв вектора $\mathbf{M}$, причём пока допустим, что обе (тангенциальная и нормальная к S) компоненты этого вектора имеют ограниченные значения. Пусть V_1 и V_2 – области пространства, разделяемые некоторой поверхностью S, а n – нормаль к S, направленная от V_1 к V_2. Проведём в областях V_1 и V_2 поверхности S_1 и S_2 на малых расстояниях $h/2$ от поверхности S, взятых по нормали к ней, и обозначим через $\mathbf{M}^{(1)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$ значения вектора $\mathbf{M}$ на поверхностях S_1 и S_2 (рис. 1.8). Выделим на поверхности S участок ΔS, ограниченный контуром $l[\Delta S]$ и, взяв этот контур в качестве направляющей, а нормаль n в качестве образующей построим прямой цилиндр $Ц$ с основаниями s_1 и s_2 на поверхностях S_1 и S_2, с боковой поверхностью s_6, проходящей через контур $l[\Delta S]$, с малой высотой h и с объёмом $\Delta V=h\cdot\Delta S$. Через замкнутую поверхность s этого цилиндра, состоящую из поверхностей s_1, s_2 и s_6, имеем поток вектора $\mathbf{M}$:

$$\oint_S (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) = \int_{S1} (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) + \int_{S2} (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) + \int_{S6} (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}). \qquad (1.43)$$

Считая нормаль на поверхности s всюду направленной наружу относительно цилиндра *Ц*, имеем:

$$\mathbf{ds}_1 = -\mathbf{n}\cdot dS, \quad \mathbf{ds}_2 = \mathbf{n}\cdot dS, \quad \mathbf{ds}_б = \nu\cdot ds_б = \nu\cdot dn\cdot dl, \qquad (1.44)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{1}_n$, $\nu = \mathbf{1}_\nu$, dn – элементарный отрезок по нормали n, dl – элемент направленной линии $l[\Delta S]$ с касательным единичным вектором $\mathbf{1}_l$.

Кроме того, имеем в дополнение к (1.40), (1.40'), (1.40'')

$$[\nu\,\mathbf{M}_n] = -\mathbf{1}_l\cdot M_n, \quad (\nu\,\mathbf{M}_n) = (\mathbf{n}\,\mathbf{M}_\nu) = (\mathbf{n}\,\mathbf{M}_l) = (\nu\,\mathbf{M}_l) = 0. \qquad (1.40''')$$

Следовательно,

$$\int_{S1} (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) + \int_{S2} (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) = \int_{\Delta S} \left(\mathbf{n}\left[\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}\right]\right) dS = \int_{\Delta S} \left(M_n^{(2)} - M_n^{(1)}\right) dS, \qquad (1.45)$$

$$\int_{S6} (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) = h \cdot \oint_{l[\Delta S]} \left(\mathbf{M}_\tau^h\,\nu\right) dl, \quad \mathbf{M}_\tau^h = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{M}_\tau\, dn, \qquad (1.45')$$

где $\mathbf{M}_\tau^h$ – усредненное по образующей цилиндра *Ц* значение тангенциальной к поверхности S компоненты поля $\mathbf{M}$.

Ввиду малости высоты h цилиндра *Ц* обычно можно заменить величину $\mathbf{M}_\tau^h$ значением $\mathbf{M}_\tau$ в средней точке образующей цилиндра, т. е. на контуре $l[\Delta S]$ его среднего сечения ΔS. Разделив обе части (1.43) на объём цилиндра ΔV, имеем

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_S (\mathbf{M}\,d\mathbf{S}) = \frac{1}{\Delta S}\int_{\Delta S} \frac{M_n^{(2)} - M_n^{(1)}}{h} dS + \frac{1}{\Delta S}\oint_{l[\Delta S]} (\nu\,\mathbf{M}_\tau^h)\, dl. \qquad (1.46)$$

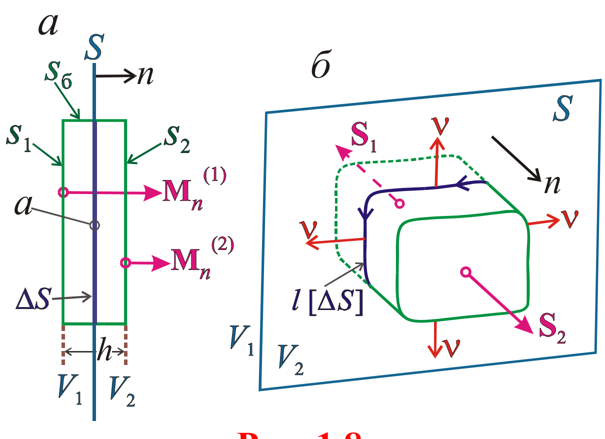


Рис. 1.8.

Построение, поясняющее вывод выражения для поверхностных производных.

Разрез по нормали, к поверхности S (*а*). Вид (сбоку) из области V_2. Контур $l[\Delta S]$ образует правовинтовую систему с нормалью n, а нормаль ν к этому контуру и к поверхности $s_б$ лежит в плоскости S (*б*)

Полагая $h \to 0$ и стягивая контур $l[\Delta S]$ к точке a на поверхности S, получаем в левой части (1.46), согласно (1.29), дивергенцию вектора $\mathbf{M}$ в точке a. В правой части во втором члене подынтегральная функция имеет ограниченное значение, так как мы полагаем, что $\mathbf{M}_\tau \neq \infty$. В первом же члене правой части подынтегральная функция при $h \to 0$ обращается в бесконечность, если при этом разность $M_n^{(2)} - M_n^{(1)}$ не стремится к нулю. Но при $h \to 0$ поверхности S_1 и S_2 представляют собой стороны поверхности S, и разность

$M_n^{(2)} - M_n^{(1)}$ есть разрыв компоненты M_n на этой поверхности. Следовательно, на поверхности S, на которой $M_n^{(2)} \neq M_n^{(1)}$, дивергенция вектора **M** теряет смысл.

В этом случае будем характеризовать поведение поля **M** у точки a на поверхности S пределом (при $h \to 0$ и $\Delta S \to 0$) отношения потока вектора **M** через поверхность s не к объёму ΔV цилиндра *Ц*, а к площади ΔS его поперечного сечения. Обозначая эту величину Div **M**, т. е. полагая

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ h \to 0}} \left[\frac{1}{\Delta S} \oint_s (\mathbf{M}\, d\mathbf{S}) \right], \qquad (1.47)$$

имеем согласно равенству (1.46), умноженному на h,

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} = \lim_{\Delta S \to 0} \left[\frac{1}{\Delta S} \left(\int_{s_0} (\mathbf{M}\, d\mathbf{S}) + \oint_{l[\Delta S]} (\mathbf{M}_\tau^\Delta\, \mathrm{v})\, dl \right) \right], \qquad (1.47')$$

где

$$\int_{s_0} (\mathbf{M}\, d\mathbf{S}) = \int_{\Delta S} \left(M_n^{(2)} - M_n^{(1)} \right) dS, \quad \mathbf{M}_\tau^\Delta = \vec{\tau} \lim_{h \to 0} \left(h\, M_\tau^h \right), \qquad (1.45'')$$

$\vec{\tau} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}_\tau$ – единичный вектор, а s_0 – совокупность сторон s_1 и s_2 участка ΔS.

Считая, что $M_\tau \neq \infty$ и, следовательно, $M_\tau^\Delta = 0$, получаем из (1.47')

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} = \lim_{\Delta S \to 0} \left[\frac{1}{\Delta S} \int_{s_0} (\mathbf{M}\, d\mathbf{S}) \right]. \qquad (1.48)$$

Принимая во внимание (1.45")$_1$ и учитывая, что при малых размерах площадки ΔS правая часть (1.45")$_1$ равна $\left(M_n^{(2)} - M_n^{(1)} \right) \cdot \Delta S$, получаем из (1.48)

$$\operatorname{Div} \mathbf{M} = M_n^{(2)} - M_n^{(1)} = \left(\mathbf{n} \left[\mathbf{M}_n^{(2)} - \mathbf{M}_n^{(1)} \right] \right). \qquad (1.49)$$

Величину Div **M** будем называть *поверхностной дивергенцией* вектора **M**. Она отличается от объёмной дивергенции div **M** тем, что замкнутая поверхность, через которую берётся поток вектора **M**, содержит вместо трёхмерной области с объёмом ΔV двухмерную область с площадью ΔS, и в соответствии с этим поток делится не на объём ΔV, а на площадь ΔS. Согласно (1.48) имеем для любой поверхности S

$$\oint_{S_0} (\mathbf{M}\, d\mathbf{S}) = \int_S \operatorname{Div} \mathbf{M}\, dS, \qquad (1.48')$$

где S_0 – замкнутая поверхность, "обтягивающая" поверхность S и состоящая из сторон S_1 и S_2 поверхности S.

Тождество (1.48') аналогично теореме Гаусса - Остроградского (1.30) для объёмной дивергенции.

Векторный поток вектора **M** через поверхность s цилиндра *Ц* (с площадью основания ΔS и высотой h, см. рис. 1.8)

$$\oint_s [d\mathbf{S}\, \mathbf{M}] = \int_{s_1} [d\mathbf{S}\, \mathbf{M}] + \int_{s_2} [d\mathbf{S}\, \mathbf{M}] + \int_{s_б} [d\mathbf{S}\, \mathbf{M}], \qquad (1.50)$$

причём согласно (1.44), (1.45')

$$\int\limits_{s_1}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]+\int\limits_{s_2}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]=\int\limits_{\Delta S}\left[\mathbf{n}\left(\mathbf{M}_n^{(2)}-\mathbf{M}_n^{(1)}\right)\right]dS,$$

$$\int\limits_{s_б}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]=-h\cdot\oint\limits_{l[\Delta S]}M_n^h\cdot\mathbf{dl}+h\cdot\mathbf{n}\cdot\oint\limits_{l[\Delta S]}\left(\mathbf{M}_\tau^h\,\mathbf{dl}\right), \tag{1.51}$$

$$M_n^h=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}M_n\,dn, \tag{1.51'}$$

где M_n^h – усредненное по образующей цилиндра *Ц* значение компоненты вектора **M**, нормальной к поверхности *S*. Разделив обе части (1.50) на объём $\Delta V=h\cdot\Delta S$ цилиндра *Ц*, получим:

$$\frac{1}{\Delta V}\oint\limits_{s}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]=\frac{1}{\Delta S}\int\limits_{\Delta S}\frac{\left[\mathbf{n}\left(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)}\right)\right]}{h}dS-\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{l[\Delta S]}M_n^h\,\mathbf{dl}+\frac{\mathbf{n}}{\Delta S}\oint\limits_{l[\Delta S]}\left(\mathbf{M}_\tau^h\,\mathbf{dl}\right). \tag{1.52}$$

Полагая $h\to 0$ и стягивая контур $l[\Delta S]$ к точке a, получаем согласно (1.37) в левой части (1.52) ротор вектора **M** в этой точке. В правой части, во втором и третьем членах, подынтегральные функции имеют ограниченные значения, так как $M_n\neq\infty$ и $M_\tau\neq\infty$. В первом же члене подынтегральная функция обращается в бесконечность при $h\to 0$, если разность, $[\mathbf{n}\,\mathbf{M}^{(2)}]-[\mathbf{n}\,\mathbf{M}^{(1)}]$ при этом не стремится к нулю. Но эта разность при $h\to 0$ представляет собой разрыв компоненты $[\mathbf{n}\,\mathbf{M}]=[\mathbf{n}\,\mathbf{M}_\tau]$ на поверхности *S*, следовательно, если тангенциальная компонента вектора **M** терпит разрыв на поверхности *S*, то ротор вектора **M** на этой поверхности теряет смысл.

В этом случае будем характеризовать поведение поля **M** у какой-либо точки поверхности *S* пределом, к которому при $h\to 0$ и $\Delta S\to 0$ стремится отношение векторного потока вектора **M** через поверхность *s* не к объёму $\Delta V=h\cdot\Delta S$ цилиндра *Ц*, а к площади ΔS его поперечного сечения. Обозначая эту величину Rot **M**, т. е. полагая в соответствии с (1.37)

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M}=\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ h\to 0}}\left(\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_{s}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]\right) \tag{1.53}$$

имеем согласно равенству (1.52), умноженному на h,

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M}=\lim_{\Delta S\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta S}\left(\int\limits_{s_0}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]-\oint\limits_{l[\Delta S]}M_n^\Delta\,\mathbf{dl}+\mathbf{n}\oint\limits_{l[\Delta S]}\left(\mathbf{M}_\tau^\Delta\,\mathbf{dl}\right)\right)\right\} \tag{1.53'}$$

где

$$\int\limits_{s_0}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]=\int\limits_{\Delta S}\left[\mathbf{n}\left(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)}\right)\right]dS,\quad M_n^\Delta=\lim_{h\to 0}\left(h\cdot M_n^h\right). \tag{1.51''}$$

Считая, что $M_n^h\neq\infty$, $M_\tau^h\neq\infty$ и, следовательно, $M_n^\Delta=0$, $M_\tau^\Delta=0$, получаем из (1.53')

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M} = \lim_{\Delta S\to 0}\left(\frac{1}{\Delta S}\int\limits_{s_0}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}]\right). \qquad (1.54)$$

Принимая во внимание (1.51'') и учитывая, что при малых размерах площадки ΔS правая часть $(1.51'')_1$ равна $[\mathbf{n}\,(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]\cdot\Delta S$, получаем вместо (1.54)

$$\operatorname{Rot}\mathbf{M} = [\mathbf{n}\,(\mathbf{M}^{(2)}-\mathbf{M}^{(1)})]. \qquad (1.54')$$

Вектор $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$ будем называть *поверхностным ротором вектора* **M**.

Согласно (1.54) для любой поверхности S имеем равенство

$$\int\limits_{s_0}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}] = \int\limits_{S}\operatorname{Rot}\mathbf{M}\,dS, \qquad (1.54'')$$

аналогичное равенству (1.48').

Таким образом, на любой поверхности S, на которой компоненты вектора **M** имеют ограниченные значения, можно определить поверхностную дивергенцию и поверхностный ротор этого вектора. Если поверхность S не является особой, то на ней поверхностные производные равны нулю и в точках этой поверхности могут быть определены объёмная дивергенция и объёмный ротор вектора **M**.

Разделив поток скаляра T через замкнутую поверхность s на площадь ΔS, получим при $h\to 0$, $\Delta S\to 0$ произведение $\mathbf{n}\cdot(T^{(2)}-T^{(1)})$. Имея в виду определение (1.35) вектора grad T, можно назвать это произведение *поверхностным градиентом* скаляра T и пользоваться обозначением

$$\operatorname{Grad} T = \mathbf{n}\cdot(T^{(2)}-T^{(1)}). \qquad (1.53'')$$

Иногда удобно представить разрыв $T^{(2)}-T^{(1)}$ скаляра T как нормальную компоненту этого вектора (см. конец § 2 третьей главы).

Поверхностные производные являются вырождениями объёмных производных, получающимися на особой поверхности поля, которую можно рассматривать как результат сжатия тонкого слоя (см. следующий раздел). Что же касается двухмерных производных, о которых шла речь в разделе II, то они являются двухмерными аналогами трёхмерных объёмных производных и характеризуют поведение двухмерного поля (см. замечание 8 в § 1).

V. Производные у предельно тонких слоёв

Полагая, что значение M ограничено, мы отбрасывали второй член в правой части (1.47') и последние два члена в правой части (1.53'). Там, где компонента $M_\tau=\infty$ или $M_n=\infty$ на поверхности S, производная $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$ или $\operatorname{Div}\mathbf{M}$ теряет смысл. Но встречаются особые случаи, когда при $M_\tau=\infty$ или $M_n=\infty$ члены, которые мы отбрасывали, имеют конечные значения. В таких случаях $\operatorname{Rot}\mathbf{M}$ и $\operatorname{Div}\mathbf{M}$ имеют смысл, но выражения, полученные для них, несправедливы. Постараемся получить для поверхностных производных выражения более общего вида, которые применимы и в этих особых случаях.

Будем рассматривать поверхность S как результат сжатия слоя, ограниченного поверхностями S_1 и S_2, на которых лежат основания цилиндра *Ц*, показанного на рис. 1.8, и выделим полоску, являющуюся поперечным сечением слоя, нормальным вектору $\mathbf{M}_\tau$. Интеграл в (1.51') представляет собой напряжение $\mathcal{E}_{12}$ на толщине h слоя, а интеграл в $(1.45')_2$ – поток ψ_τ вектора $\mathbf{M}$ через полоску, приходящийся на единицу её длины l. Поэтому

$$M_\tau^h = \frac{1}{h}\frac{\partial\psi_\tau}{\partial l}, \quad M_n^h = \frac{1}{h}\mathcal{E}_{12}, \tag{1.55}$$

где l – линия пересечения полоски с поверхностью S.

С уменьшением h компоненты M_τ и M_n стремятся к своим средним значениям M_τ^h и M_n^h в слое.

При достаточно малом h

$$M_\tau^\Delta = h\cdot M_\tau^h = h\cdot M_\tau, \quad M_n^\Delta = h\cdot M_n^h = h\cdot M_n. \tag{1.55'}$$

Поэтому, считая, что при сжатии слоя сохраняется конечное значение потока ψ_τ или напряжения $\mathcal{E}_{12}$, имеем на поверхности S

$$M_\tau = \infty, \quad M_\tau^\Delta = \frac{\partial\psi_\tau}{\partial l} \neq \infty \quad \text{или} \quad M_n = \infty, \quad M_n^\Delta = \mathcal{E}_{12} \neq \infty\,. \tag{1.56}$$

Определим Div **M** для первого из этих случаев и Rot **M** для второго из них.

В первом случае в правой части (1.47') второй член в квадратных скобках не равен нулю и согласно (1.45'') и (1.39) получаем вместо (1.49)

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{M} = M_n^{(2)} - M_n^{(1)} + \mathrm{div}^s\,\mathbf{M}_\tau^\Delta, \tag{1.57}$$

где $\mathrm{div}^s\,\mathbf{M}_\tau^\Delta$ – двухмерная дивергенция вектора $\mathbf{M}_\tau^\Delta$ на поверхности S.

Во втором случае в правой части (1.53') второй член в квадратных скобках не обращается в нуль и вместо (1.54) имеем

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = \lim_{\Delta S\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta S}\left(\int\limits_{s_0}[\mathbf{dS}\,\mathbf{M}] - \oint\limits_{l[\Delta S]}\mathcal{E}_{12}\,\mathbf{dl}\right)\right\}. \tag{1.58}$$

Поэтому согласно (1.53') и $(1.41)_2$ получаем вместо (1.54')

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{M} = [\mathbf{n}\ (\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)})] - [\mathbf{n}\ \mathrm{grad}^s\,\mathcal{E}_{12}], \tag{1.59}$$

где $\mathrm{grad}^s\,\mathcal{E}_{12}$ – двухмерный градиент от напряжения $\mathcal{E}_{12}$ между сторонами S_1 и S_2 поверхности S.

Формулы (1.48), (1.48') и (1.54), (1.54'') при определениях (1.57) в (1.59) остаются справедливыми, но в состав поверхностей s_0 и S_0 при этом включаются соответственно контуры $l[\Delta S]$ и $l[S]$.

Из (1.59) следует, что

$$\mathrm{Rot}_t\,\mathbf{M} = \big((\mathbf{M}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)} - \mathrm{grad}^s\,\mathcal{E}_{12})\ [\mathbf{t}\ \mathbf{n}]\big), \tag{1.59'}$$

где $\mathrm{Rot}_t\,\mathbf{M}$ – скалярная компонента вектора Rot **M** по направлению t, $\mathbf{t} = \mathbf{1}_t$, $\mathbf{n} = \mathbf{1}_n$.

§ 5. ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЛЯ

Вторыми являются производные от градиента скаляра и от ротора и дивергенции вектора. Начнём со вторых производных скалярного поля: rot grad T и div grad T. Затем перейдем ко вторым производным векторного поля:

div rot **M**, grad div **M**, rot rot **M**. Попутно коснёмся некоторых тем, связанных со вторыми производными поля.

I. Ротор градиента

Подставляя в (1.25) – (1.25") вместо вектора **M** вектор grad T и вместо компонент вектора **M** выражения (1.10''') для компонент вектора grad T убеждаемся, что все компоненты вектора rot grad T обращаются в нуль. Так, например, из (1.25) получаем для скалярной компоненты вектора rot grad T по координатной линии l_1

$$(rot\,\mathrm{grad}\,T)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial T}{\partial\xi_3}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial T}{\partial\xi_2}\right)\right] = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{rot\,grad}\,T = 0. \tag{1.60}$$

Применяя преобразование (1.23) (теорему Стокса) к вектору **M** = grad T, имеем согласно (1.60) для любого замкнутого контура l

$$\oint_l (\mathrm{grad}\,T\,\mathbf{dl}) = 0, \tag{1.61}$$

т. е. циркуляция вектора grad T равна нулю.

II. Потенциал

Согласно (1.60), если **M** = grad T, то rot **M** = 0.

Справедливо также обратное положение:

$$\text{если}\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{M} = 0, \quad \text{то} \quad \mathbf{M} = \mathrm{grad}\,T. \tag{1.62}$$

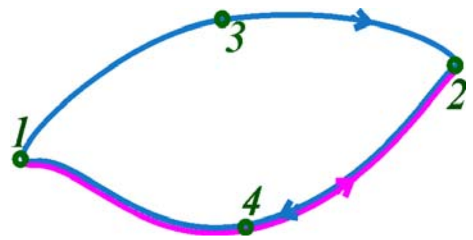


Рис. 1.9.
Два пути, соединяющие точки *1* и *2*

Действительно, в области V, в которой rot **M** = 0, циркуляция по любому замкнутому контуру l согласно (1.23) равна нулю, из чего следует (1.62). Для доказательства проведём между точками *1* и *2* два пути: $l_{1,3,2}$ и $l_{1,4,2}$ через произвольно взятые точки *3* и *4*. (рис. 1.9). Работа (напряжение) по замкнутому контуру $l_{1,3,2,4,1}$, состоящему из путей $l_{1,3,2}$ и $l_{2,4,1}$, представляет собой сумму работ по этим путям. Допуская, что циркуляция в поле **M** по любому замкнутому контуру равна нулю, имеем

$$\mathcal{E}_{1,3,2,4,1} = \mathcal{E}_{1,3,2} + \mathcal{E}_{2,4,1} = 0 \quad \text{т. е.} \quad \mathcal{E}_{1,3,2} = -\mathcal{E}_{2,4,1} = \mathcal{E}_{1,4,2}\,.$$

Здесь принято во внимание, что на линиях $l_{1,4,2}$ и $l_{2,4,1}$ направления соответствующих элементарных направленных отрезков **dl** – противоположны.

Таким образом, работа $\mathcal{E}_{1\,2}$ на пути $l_{1\,2}$ зависит только от положения точек *1* и *2*. В частности, работа (напряжение) $\mathcal{E}_{\phi a}$ на пути от фиксированной точки ϕ до переменной (произвольно расположенной) точки a является функцией положения точки a:

$$\int_{\phi}^{a} (\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\phi a}(a). \tag{1.63}$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = d\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\phi a} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\phi a}}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\phi a}}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\phi a}}{\partial l_3} dl_3. \tag{1.63'}$$

Следовательно, согласно (1.11) и (1.6) $(\mathbf{M}\,\mathbf{dl}) = (\mathrm{grad}\,\mathcal{E}_{\phi a}\,\mathbf{dl})$, т. е. $\mathbf{M} = \mathrm{grad}\,\mathcal{E}_{\phi a}$, поэтому, полагая $\mathcal{E}_{\phi a} = T + C$, где C – постоянная, имеем $\mathbf{M} = \mathrm{grad}\,T$.

Каждому скалярному полю T соответствует векторное поле $\mathbf{M} = \mathrm{grad}\,T$, но не каждый вектор $\mathbf{M}$ является градиентом какого-либо скаляра T. Если $\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = 0$, то согласно (1.62) вектор $\mathbf{M}$ может быть представлен как градиент некоторого скаляра T. В таком случае (при $\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = 0$) поле $\mathbf{M}$ называется *потенциальным*, а скаляр T (или $-T$) называют *потенциалом поля* $\mathbf{M}$ и обозначают U. Обычно потенциалом поля $\mathbf{M}$ считают скаляр U, удовлетворяющий равенству $\mathbf{M} = -\,\mathrm{grad}\,U$.

Для однородного поля (1.9) (см. рис. В.18, *а*) $\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{M} = -\,\mathrm{grad}\,U$, в чём убеждаемся, полагая

$$U = -\,C_x \cdot x - C_y \cdot y - C_z \cdot z \tag{1.63''}$$

и применяя к этому скаляру U формулу (1.13).

Поверхности равных значений скаляра U называют *эквипотенциальными поверхностями векторного поля* $\mathbf{M} = -\,\mathrm{grad}\,U$. Они являются неориентированными поверхностями уровня поля скаляра U. Линии пересечения этих поверхностей с какой-либо поверхностью, например с поверхностью земли, называют *эквипотенциальными линиями*.

Для определения векторного поля $\mathbf{M} = -\,\mathrm{grad}\,U$ достаточно знать скалярное поле его потенциала U, так как значение компоненты вектора $\mathrm{grad}\,U$ по любому направлению l определяется согласно (1.10'') дифференцированием скаляра U по этому направлению.

III. Дивергенция градиента

Производную $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T$ называют *лапласианом скаляра* T и обозначают ΔT (или $\nabla^2 T$):

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T = \Delta T, \quad \text{т. е.} \quad (\nabla\,(\nabla\,T)) = \nabla^2 T = \Delta T, \tag{1.64}$$

а символ $\Delta = \nabla^2$ называют *оператором Лапласа*.

Подставляя в (1.32), (1.32') $\mathbf{M} = -\,\mathrm{grad}\,T$, имеем согласно (1.10''')

$$\Delta T = \frac{1}{dl_1 dl_2 dl_3}\left[\frac{\partial\left(dl_2 dl_3 \frac{\partial T}{\partial l_1}\right)}{\partial l_1} dl_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\left(dl_3 dl_1 \frac{\partial T}{\partial l_2}\right)}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial\left(dl_1 dl_2 \frac{\partial T}{\partial l_3}\right)}{\partial l_3} dl_3\right]. \qquad (1.65)$$

или

$$\Delta T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial T}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial T}{\partial \xi_3}\right)\right]. \qquad (1.65')$$

В системе x, y, z

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \qquad (1.66)$$

в системе r, φ, z

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \qquad (1.66')$$

в системе R, θ, φ

$$\Delta T = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial T}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}. \qquad (1.66'')$$

Согласно (1.66) в декартовых координатах оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = (\nabla\ \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (1.67)$$

IV. Гармоническая функция, уравнение Пуассона – Лапласа

Перейдем в (1.66) от производных к конечным разностям. При достаточно малом Δx

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left[T\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - T\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\right], \qquad (1.68)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y,\, z\right)-\frac{\partial T}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2},\, y,\, z\right)\right], \qquad (1.68')$$

где согласно (1.68)

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y,\, z\right)=\frac{1}{\Delta x}\left[T(x+\Delta x,\, y,\, z)-T(x,\, y,\, z)\right], \qquad (1.69)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2},\, y,\, z\right)=\frac{1}{\Delta x}\left[T(x,\, y,\, z)-T(x-\Delta x,\, y,\, z)\right]. \qquad (1.69')$$

Обозначая $T(x, y, z) = T_a$, $T(x-\Delta x, y, z) = T_x{}'$, $T(x+\Delta x, y, z) = T_x{}''$, получаем из (1.68') согласно (1.69) и (1.69')

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(T_x{}''-2T_a+T_x{}'\right). \qquad (1.70)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{(\Delta y)^2}\left(T_y{}''-2T_a+T_y{}'\right),\quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{(\Delta z)^2}\left(T_z{}''-2T_a+T_z{}'\right). \qquad (1.70')$$

где

$T(x, y-\Delta y, z) = T_y{}'$, $T(x, y+\Delta y, z) = T_y{}''$, $T(x, y, z-\Delta z) = T_z{}'$, $T(x, y, z+\Delta z) = T_z{}''$.

Складывая эти выражения для вторых производных от T по x, y и z и полагая $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, получаем

$$\nabla^2 T=\frac{1}{h^2}\left(T_x{}'+T_x{}''+T_y{}'+T_y{}''+T_z{}'+T_z{}''-6T_a\right)=\frac{6}{h^2}\left(T_{\text{ср}}-T_a\right), \qquad (1.71)$$

где

$$T_{\text{ср}}=\frac{1}{6}\left(T_x{}'+T_x{}''+T_y{}'+T_y{}''+T_z{}'+T_z{}''\right). \qquad (1.72)$$

Из (1.71) следует, что если лапласиан поля T равен нулю, то $T_a = T_{\text{ср}}$. Функция T, удовлетворяющая условию $\nabla^2 T = 0$ в какой-либо области пространства V, называется *гармонической* в этой области. Таким образом, значение гармонической функции в точке a есть среднее арифметическое из значений этой функции в шести точках $a_k{}'$, $a_k{}''$ ($k = 1, 2, 3$), расположенных на одинаковых (малых) расстояниях h от неё на любых трёх взаимно перпендикулярных прямых l_k, пересекающихся в этой точке. Иначе говоря, значение гармонической функции в центре любого, достаточно малого куба равно среднему, арифметическому из значений этой функции в центрах шести граней куба (рис. 1.10).

Выполняя операцию ∇^2 над заданным полем T, мы определяем некоторую функцию $\beta(a)$, которая является мерой отличия поля T от поля гармонической функции. Но можно, наоборот, задаться некоторой функцией $\beta(a)$ и определять поле T, удовлетворяющее требованию, чтобы его лапласиан в любой точке a был равен $\beta(a)$. В таком аспекте равенство

$$\nabla^2 T = \beta(a) \qquad (1.73)$$

представляет собой уравнение поля T. Оно называется *уравнением Пуассона*. При $\beta(a)=0$ уравнение Пуассона (1.73) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\nabla^2 T=0, \qquad (1.73')$$

любое решение которого согласно сказанному выше называется гармонической функцией. Если T' и T'' – решения уравнения Пуассона (1.73), т. е. если

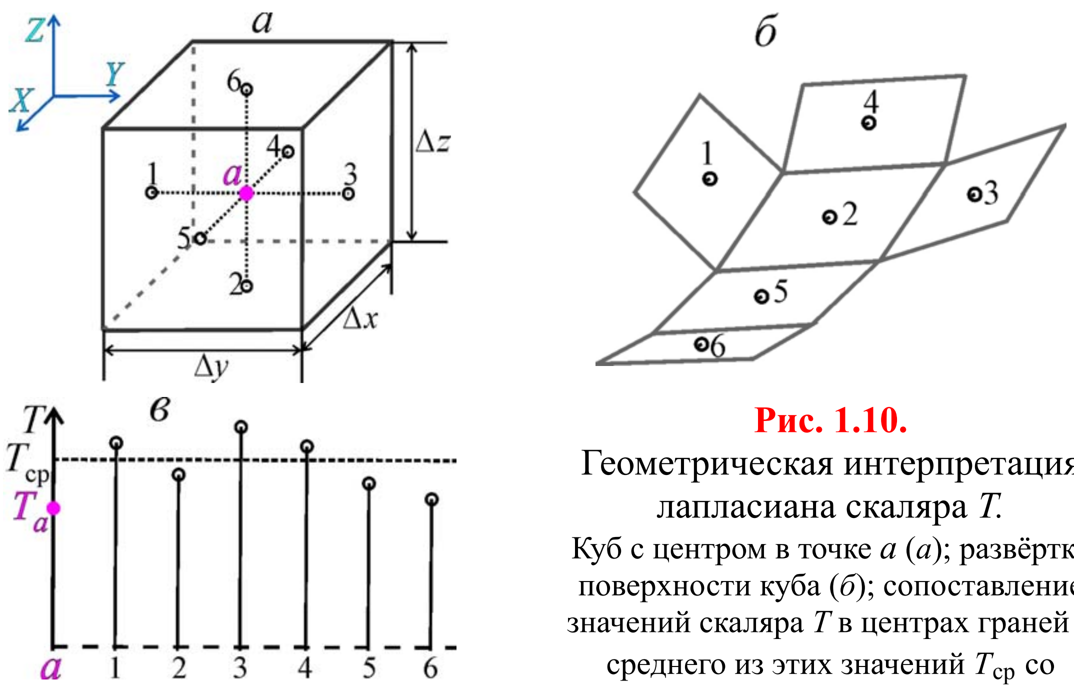


Рис. 1.10.
Геометрическая интерпретация лапласиана скаляра T.
Куб с центром в точке a (*а*); развёртка поверхности куба (*б*); сопоставление значений скаляра T в центрах граней и среднего из этих значений $T_{ср}$ со значением T_a в центре куба (*в*)

$\nabla^2 T'=\beta(a)$ и $\nabla^2 T''=\beta(a)$, то ввиду линейности этого уравнения поле $T'''=T''-T'$, очевидно, удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 T'''=0$ и, следовательно, поле $T''=T'+T'''$ может отличаться от поля T' только гармоническим слагаемым. Таким образом, уравнение Пуассона (1.73) определяет поле T с точностью до произвольной гармонической функции.

Мы видели, что значение лапласиана $\nabla^2 T$ в точке a с координатами x, y, z определяет отличие значения $T(x, y, z)$ функции T от среднего из её шести значений: $T(x\pm\Delta x, y, z)$, $T(x, y\pm\Delta y, z)$, $T(x, y, z\pm\Delta z)$. Для производной d^2y/dx^2 функции y одной переменной x получаем аналогично (1.71), (1.72)

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{2}{(\Delta x)^2}\left[y_{ср}-y(x)\right], \quad y_{ср}=\frac{1}{2}\left[y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)\right]. \qquad (1.71')$$

При $d^2y/dx^2=0$ имеем, согласно (1.71'), $y(x)=y_{ср}$, а ордината $y(x)$ прямой $y=A\cdot x+B$ (A и B – постоянные), соответствующей решению уравнения $d^2y/dx^2=0$, очевидно равна полусумме ординат $y(x\pm\Delta x)$ этой прямой. Следовательно, производная d^2y/dx^2 определяет отличие функции $y(x)$ от линейной зависимости y от x, т. е. отклонение кривой $y(x)$ от прямой $y=A\cdot x+B$. Эта кривая выпукла при $d^2y/dx^2<0$ и вогнута при $d^2y/dx^2>0$. Сравнивая это с изложенным выше, мы видим, что лапласиан и гармоническая функция являются пространственными аналогами производной d^2y/dx^2 и функции $y = A\cdot x + B$.

Очевидно, что если в интервале $x_1 \le x \le x_2$ функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y = A\cdot x + B$, то достаточно знать два её значения на этом интервале, например, $y(x_1)$ и $y(x_2)$ в краевых точках интервала, чтобы определить значения $y(x)$ на всём этом интервале. В частности, если $y(x_1) - y(x_2) = y_1$ то функция $y(x)$ при любом x на интервале x_1, x_2 равна y_1. Аналогичным свойством обладает гармоническая функция: если функция $T(a)$ в области V удовлетворяет уравнению $\nabla^2 T = 0$, то, как будет доказано в § 8, значения этой функции на поверхности S, ограничивающей область V, т. е. во всех краевых точках области V, определяют её значения во всех точках этой области. В частности, если скаляр T имеет во всех точках поверхности $S[V]$ одно и то же значение, то он имеет такое же значение во всех точках области V.

Можно сказать, что (удовлетворяющая уравнению Лапласа) гармоническая функция зависит от координат x, y, z «в среднем линейно», а лапласиан поля T является мерой «нелинейности в среднем» изменения T по трём взаимно перпендикулярным направлениям. При $\nabla^2 T < 0$ имеем «выпуклость в среднем», а при $\nabla^2 T > 0$ – «вогнутость в среднем».

V. Дивергенция ротора, векторный потенциал

Составив по формулам (1.25) – (1.25'') выражения для скалярных компонент $\mathrm{rot}_1\,\mathbf{A}$, $\mathrm{rot}_2\,\mathbf{A}$, $\mathrm{rot}_3\,\mathbf{A}$ векторного поля $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ и подставив их вместо M_1, M_2, M_3 в (1.32'), получим:

$$h_1h_2h_3\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial(h_3A_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(h_2A_2)}{\partial\xi_3}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial(h_1A_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(h_3A_3)}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\partial(h_2A_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(h_1A_1)}{\partial\xi_2}\right)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv 0, \quad \text{т. е. } \big(\nabla\,[\nabla\,\mathbf{A}]\big) \equiv 0. \tag{1.74}$$

Если вектор **M** является ротором какого-либо вектора **A**, то вектор **A** называют *в е к т о р н ы м п о т е н ц и а л о м п о л я* **M**. Этот потенциал аналогичен скалярному потенциалу T поля $\mathbf{M} = \mathrm{grad}\,T$ в том смысле, что если известно поле **A**, то можно от него, перейти к полю $\mathbf{M} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ с помощью производных по координатным направлениям от компонент вектора **A**.

Термин «потенциал» (без прилагательного) часто употребляют применительно к скалярному потенциалу (U, T) и, говоря «потенциальное поле» или «поле, имеющее потенциал», имеют в виду этот (обычный) потенциал.

Согласно (1.74) необходимым условием существования векторного потенциала **A** поля **M** является равенство нулю дивергенции вектора **M**: если $\mathbf{M} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, то $\mathrm{div}\,\mathbf{M} = 0$. Справедливо также обратное положение ([Кочин, 1965], с. 172):

$$\text{если} \quad \mathrm{div}\,\mathbf{M} = 0, \quad \text{то} \quad \mathbf{M} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{1.74'}$$

Если $\mathbf{A}_0$ – векторный потенциал поля $\mathbf{M}$, т. е. если rot $\mathbf{A}_0 = \mathbf{M}$, то вектор

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \operatorname{grad} T, \tag{1.75}$$

где T – произвольный скаляр, очевидно, также является потенциалом этого поля, так как согласно (1.60) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} T = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_0$.

Таким образом, векторный потенциал **A** поля **M** определяется по этому полю **M** с точностью до слагаемого, равного градиенту произвольного скаляра.

Можно в выражении (1.75) подобрать скаляр T так, чтобы дивергенция вектора **A** была равна некоторой функции Θ. Согласно. (1.75) и (1.64) $\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \operatorname{div}\operatorname{grad} T = \operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \nabla^2 T$, следовательно

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \Theta \quad \text{при} \quad \nabla^2 T = \Theta - \operatorname{div}\mathbf{A}_0. \tag{1.76}$$

Таким образом, задание $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ равносильно подчинению функции T в выражении (1.75) для **A** уравнению $(1.76)_2$.

VI. Градиент дивергенции и ротор ротора

Подставляя в выражение (1.13) для градиента скаляра T вместо T выражение (1.33) для дивергенции вектора **M**, получаем в системе x, y, z

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y\,\partial x}\right) +$$

$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z\,\partial y}\right) + \mathbf{1}_x\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \mathbf{1}_y\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \mathbf{1}_z\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}. \tag{1.77}$$

Если в (1.27) подставить вместо вектора **M** вектор rot **M**, то получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x\,\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y\,\partial x}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z\,\partial y}\right) -$$

$$-\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2}\right) - \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}\right) - \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2}\right). \tag{1.78}$$

Из (1.77), (1.78) следует равенство

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \mathbf{1}_x\nabla^2 M_x + \mathbf{1}_y\nabla^2 M_y + \mathbf{1}_z\nabla^2 M_z. \tag{1.78'}$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{1}_x\nabla^2 M_x + \mathbf{1}_y\nabla^2 M_y + \mathbf{1}_z\nabla^2 M_z = \nabla^2\mathbf{M}, \tag{1.79}$$

получаем из (1.78')

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} - \nabla^2\mathbf{M} \tag{1.80}$$

или

$$[\nabla[\nabla\,\mathbf{M}]] = \nabla(\nabla\,\mathbf{M}) - \nabla^2\mathbf{M}. \tag{1.80'}$$

Для простоты изложения мы при выводе формул (1.77) – (1.80') пользовались декартовыми координатами. Применяя криволинейные координаты, получаем вместо (1.78')

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \sum \nabla^2\mathbf{M}_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.78''}$$

и приходим опять к формуле (1.80). Однако для общего случая, в отличие от (1.79),

$$\nabla^2 \mathbf{M} = \nabla^2(\mathbf{1}_1 \cdot M_1) + \nabla^2(\mathbf{1}_2 \cdot M_2) + \nabla^2(\mathbf{1}_3 \cdot M_3), \qquad (1.79')$$

где, в соответствии с (1.55'), оператор

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{h_{i+1} h_{i+2}}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \; (i = 1,2,3; \; i+1 = 2,3,1; \; i+2 = 3,1,2). \qquad (1.79'')$$

Встречающееся утверждение о неприменимости оператора $\Delta = \nabla^2$ к вектору и о необходимости ограничиться в соотношении (1.80) декартовыми координатами является ошибочным. Однако при дифференцировании вектора, представленного компонентами по координатным направлениям криволинейной системы, нельзя забывать дифференцировать орты $\mathbf{1}_k$. Векторы $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ не зависят от координат x, y, z, поэтому их производные по этим координатам равны нулю. В системах r, φ, z; R, θ, φ направления некоторых ортов зависят от координат, что необходимо учитывать при дифференцировании векторных компонент (см. раздел IV § 9).

В качестве определения лапласиана вектора, т. е. $\nabla^2\mathbf{M}$ можно принять соотношения (1.80), (1.80'). Но этот лапласиан можно также непосредственно определить в любой ортогональной системе координат формулами (1.79'), (1.79'').

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Любое векторное поле **M** можно ([Кочин, 1965], с. 192) выразить через три скалярных поля Λ, T, Φ по формуле

$$\mathbf{M} = \Lambda \cdot \operatorname{grad} T + \operatorname{grad} \Phi, \qquad (1.81)$$

из которой следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = [\nabla\Lambda \; \nabla T], \quad (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}) = (\nabla\Phi \; [\nabla\Lambda \; \nabla T]). \qquad (1.82)$$

В общем случае, когда ни один из векторов $\nabla\Lambda = \operatorname{grad}\Lambda$, $\nabla T = \operatorname{grad} T$, $\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi$ не коллинеарен другому (и не равен нулю), имеем согласно (1.82)

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} \neq 0, \qquad (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}) \neq 0. \qquad (1.83)$$

I. Квазипотенциальное поле

Менее общим является векторное поле

$$\mathbf{M} = \Lambda \cdot \operatorname{grad} T, \qquad (1.84)$$

для которого, очевидно, также справедливо $(1.82)_1$. Будем называть это поле квазипотенциальным. Потенциальное поле $\mathbf{M} = \operatorname{grad} T$ является частным видом квазипотенциального поля. Оно получается из (1.84) при $[\nabla\Lambda \; \nabla T] = 0$. Исключая этот случай, получаем для квазипотенциального поля согласно (1.82)

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} \neq 0, \quad (\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}) = 0. \qquad (1.85)$$

Иначе говоря, квазипотенциальное поле перпендикулярно к своему ротору. Условие $(1.85)_2$ не только необходимо для справедливости выражения (1.84), оно также достаточно ([Кочин, 1965], с. 190) для этого, т. е. выражение $\mathbf{M} = \Lambda \cdot \operatorname{grad} T$ следует из равенства нулю произведения $(\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M})$. Из (1.81) следует, что любое векторное поле за вычетом некоторого потенциального слагаемого является квазипотенциальным.

Однако квазипотенциальное поле может содержать коллинеарное ему потенциальное слагаемое. Так, например, полагая в (1.84) $\Lambda = \Lambda' + C$, имеем $\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{M}''$, $\mathbf{M}' = \Lambda' \cdot \mathrm{grad}\, T$, $\mathbf{M}'' = C \cdot \mathrm{grad}\, T$, $\mathrm{rot}\, \mathbf{M}'' = 0$, $(\mathbf{M}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{M}) = (\mathbf{M}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{M}') = \Lambda(\nabla T\, [\nabla \Lambda'\, \nabla T]) = 0$.

Обычно (но отнюдь не всегда) приходится иметь дело с квазипотенциальными или потенциальными полями, т. е. с векторными полями, у которых ротор вектора перпендикулярен к этому вектору или равен нулю.

Семейство векторных линий l_M (см. замечание 7 в § 1) квазипотенциального поля определяет ортогональное к нему семейство «нормальных поверхностей» S_M (рис. 1.11).

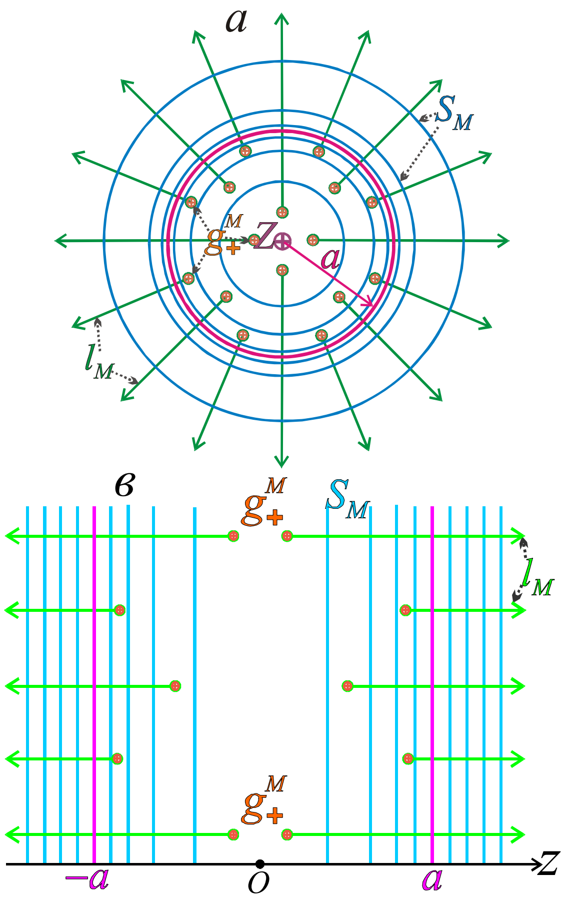


Рис. 1.11.

Спектры линий l_M и поверхностей S_M в системе r, φ, z.

Поля: ламелларное с кривыми поверхностями S_M (*а*), соленоидальное с кривыми линиями l_M (*б*), ламелларное, коллинеарное оси Z (*в*).

Спектры *а*, *б* – в плоскости $z = \mathrm{const}$ (красными линиями показано сечение поверхности $r = a$); спектр *в* – в полуплоскости $\varphi = \mathrm{const}$ (красными линиями показано сечение плоскостей $z = \pm a$)

Эти поверхности соответствуют поверхностям уровня скаляра T, так как векторы $\mathrm{grad}\, T$ и $\Lambda \cdot \mathrm{grad}\, T$ коллинеарны.

Обозначение S_M будем иногда применять к эквипотенциальным поверхностям, так как в поле $\mathbf{M} = -\nabla U$ поверхности $U = \mathrm{const}$ являются неориентированными нормальными поверхностями S_M.

Будем полагать, что на поверхностях S_M нормали n направлены по полю $\mathbf{M}$:

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{dS}_M) = 1, \quad \mathbf{dS}_M = \mathbf{1}_M \cdot dS_M. \tag{1.86}$$

Очевидно, что поток вектора $\mathbf{M}$ через любой участок поверхности S_M всегда положителен. Ниже будем применять поверхности S_M, имея при этом в виду квазипотенциальное поле **M**, которое может, в частности, оказаться потенциальным.

II. Источники поля и нарушение его соленоидальности

Для того чтобы векторными линиями l_M иллюстрировать не только направление поля **M**, но также его абсолютную величину M, считают векторные линии проведенными с "густотой" (плотностью) æ·M, пропорциональной M. Будем считать, что через любую площадку dS проходит æ·(**M dS**) линий l_M (см. замечание 4 в § 1). Таким образом, поток ψ вектора **M** через какую-либо поверхность определяется числом векторных линий l_M, пронизывающих эту поверхность, т. е. он равен этому числу, делённому на æ. Поток $\psi_{S[V]}$ через замкнутую поверхность $S[V]$ определяется разностью чисел линий, выходящих из области V и входящих в неё. Считая вхождение отрицательным выходом, скажем, что поток $\psi_{S[V]}$ определяется числом линий l_M, выходящих или расходящихся из области V.

Если векторные линии проходят через область V насквозь, то поток вектора **M** через поверхность $S[V]$, очевидно, равен нулю, следовательно, поток через замкнутую поверхность определяют только те линии l_M, которые либо начинаются, либо кончаются в области V – разность чисел этих линий.

Из изложенного следует, что правую часть (1.29') определяется числом векторных линий, расходящихся из элемента объёма dV, делённым на этот объём или, короче, числом линий, расходящихся из единицы объёма. Поэтому дивергенцию вектора **M** называют его *расхождением* или *расходимостью*. Значение производной div **M** в точке a является мерой расхождения поля **M** (его линий l_M) из единицы объёма со средней точкой a.

Сечение векторной трубки (на поверхности которой лежат линии l_M) нормальной поверхностью S_M будем называть поперечным (нормальным) сечением или (иногда, для краткости) сечением трубки, а поток вектора **M** через поперечное сечение трубки – потоком в трубке (рис. 1.12).

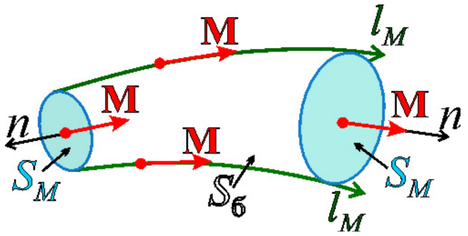


Рис. 1.12.
Векторная трубка и её нормальные сечения S_M

Поток ψ_{12} через замкнутую поверхность $S[V_{12}]$ отрезка V_{12} векторной трубки, ограниченного поперечными полю **M** сечениями S_1 и S_2, равен $\psi_б - \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_б$ – поток через боковую поверхность $S_б$ векторной трубки, равный нулю, ψ_1 и ψ_2 – потоки через сечения S_1 и S_2. Знак минус при ψ_1 взят, считая на S_1 нормаль направленной внутрь отрезка трубки, т. е. по полю, а при определении потока через $S[V_{12}]$ нормаль берут всюду направленной наружу относительно области V_{12}. Таким образом,

$$\psi_{12} = \psi_2 - \psi_1, \quad \text{откуда} \quad \int\limits_{V_{12}} \operatorname{div} \mathbf{M}\, dV = \psi_2 - \psi_1 \qquad (1.87)$$

согласно (1.30).

Заменим область V_{12} элементарным отрезком $dV^{\text{тр}} = dl_M \cdot dS_M{}^{\text{тр}}$ элементарной векторной трубки с поперечным, сечением $dS_M{}^{\text{тр}}$, причём условимся, что в пределах этого отрезка ориентация векторных линий l_M не меняется. Вместо $\psi_2 - \psi_1$ получим приращение $\dfrac{\partial\psi_{\text{тр}}}{\partial l_M} dl_M$ потока $\psi_{\text{тр}} = M \cdot dS_M{}^{\text{тр}}$ в трубке на элементе dl_M её длины, а вместо $(1.87)_2$ –

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = \frac{dl_M}{dV_{\text{тр}}}\frac{\partial}{\partial l_M}\left(M\, dS_M^{\text{тр}}\right) = \frac{1}{dS_M^{\text{тр}}}\frac{\partial\psi_{\text{тр}}}{\partial l_M}. \tag{1.88}$$

Таким образом, дивергенция вектора **M** равна производной по направлению поля **M** от потока в трубке единичного среднего сечения.

Если в некоторой области Θ $\operatorname{div}\mathbf{M} = 0$, то согласно (1.87), (1.88) в пределах этой области потоки вектора **M** через все поперечные сечения какой-либо векторной трубки имеют одно и то же значение. То есть поток в такой трубке всюду одинаков, все сечения трубки пронизывают одни и те же линии l_M, эти линии нигде не обрываются. В таком случае поле в области Θ называют *соленоидальным*, т. е. трубчатым, так как оно разделяется на трубки постоянного (вдоль них) потока ψ.

Область называется *апериффрактической*, если в ней любая замкнутая поверхность может быть стянута в точку; в противном случае имеем *периффрактическую* область. Такой становится любая апериффрактическая область, если из неё изъять некоторую внутреннюю часть или хотя бы одну точку. Примером периффрактической области является сферический слой. Но если из этого слоя изъять хотя бы одну линию, соединяющую его границы, то от него останется апериффрактическая область. Если в апериффрактической области Θ поле **M** соленоидально, то поток вектора **M** через любую замкнутую поверхность $S[V]$ в этой области равен нулю, так как во всей области V, охватываемой этой поверхностью, $\operatorname{div}\mathbf{M} = 0$. Если же область Θ периффрактическая, то в ней возможны замкнутые поверхности, потоки вектора **M** через которые отличны от нуля, потому что часть V' области V может не принадлежать области Θ и может оказаться, что в V' $\operatorname{div}\mathbf{M} \neq 0$. Если поле **M** соленоидально во всём пространстве, то его линии l_M нигде не обрываются: каждая линия l_M должна быть замкнутой или продолжаться в обе стороны до бесконечности, где она, можно считать, замыкается.

Если правые части (1.87), (1.88) не равны нулю, т. е. если поток в трубке меняется от сечения к сечению, то между сечениями в ней имеются обрывы линий l_M (их концы или начала). Места, в которых начинаются и кончаются векторные линии, называются соответственно *истоками* и *стоками поля*, его *возбудителями*. Считая стоки отрицательными истоками, называют и те и другие возбудители поля его *источниками*. Физически ими могут, например, быть электрические заряды, на которых начинаются и кончаются силовые линии электрического поля. Плотность источников поля **M** определяется густотой точек обрыва g^M векторных линий l_M, т. е. числом этих точек в единице объёма, считая начала g_+^M со знаком плюс и концы g_-^M – со знаком минус (см. рис. В.5, *в*, рис. 1.11, *а*, *в*). Поток вектора **M** через поверхность $S[V]$, ограничивающую область V, определяется числом точек g^M в области V. Таким образом, дивергенция вектора **M** определяется *плотностью источников* поля – числом точек g^M в единице объёма.

Из сказанного следует, что дивергенцию поля **M**, плотность его источников можно рассматривать как меру нарушения соленоидальности поля **M**. Соленоидальность – геометрическая интерпретация отсутствия источников.

III. Вихревые возбудители поля и нарушение его ламеллярности

Поле **M** можно изображать нормальными поверхностями S_M, проведенными с густотой æ'·M, пропорциональной M и равной числу поверхностей S_M, пересекающих единичный отрезок линии l_M. Область *СЛ*, заключённую между двумя поверхностями S_M, назовём нормальным слоем. Элементарным нормальным слоем *сл* будем называть слой, ограниченный очень близкими поверхностями S_M. Расстояние $dl_M^{\text{сл}}$ между его границами по линии l_M будем называть толщиной элементарного слоя *сл*, а напряжение $M\,dl_M^{\text{сл}}$ на слое *сл* (на его толщине, между его границами S_M) обозначим $\mathcal{E}^{\text{сл}}$. Напряжение $\mathcal{E}$ на слое *сл* получается интегрированием произведения $M{\cdot}dl_M$ по линии l_M между границами S_M этого слоя. Оно согласно сказанному выше определяется числом поверхностей S_M, заключённых в слое. Там, где вдоль слоя меняется напряжение на нём, также меняется число поверхностей S_M в нём, эти поверхности должны обрываться. В таких местах должны быть линии L^M обрыва поверхностей S_M (см. рис. 1.11, *б*). Линии L^M – замкнутые, но они могут замыкаться на бесконечности. Направление на линии L^M, ограничивающей поверхность S_M, выберем так, чтобы эта линия образовала правовинтовую систему с нормалью к поверхности S_M.

В общем случае напряжение $\mathcal{E}^{\text{сл}}$ на элементарном нормальном слое *сл* можно считать функцией положения точки *a* на средней поверхности $S_M^{\text{ср}}$ этого слоя. Будем рассматривать часть этого слоя в малой окрестности точки *a* и будем считать, что в пределах этой окрестности ориентация линий l_M не меняется. Поведение функции $\mathcal{E}^{\text{сл}}(a)$ на поверхности $S_M^{\text{ср}}$ будем характеризовать вектором

$$\operatorname{grad}^S \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{сл}} = \mathsf{v}_{\text{ур}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathsf{v}_{\text{ур}}} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{сл}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{сл}} = M \cdot dl_M^{\text{сл}}, \tag{1.89}$$

где $\boldsymbol{\nu}_{\text{ур}} = \mathbf{1}_{\nu\text{ур}}$ – единичная нормаль к линии уровня скаляра $\mathcal{E}^{\text{сл}}$ на $S_M^{\text{ср}}$, направленная в сторону увеличения $M{\cdot}dl_M^{\text{сл}}$. Направления векторов $\boldsymbol{\nu}_{\text{ур}}$, **M**, $\mathbf{L}^M$ образуют правовинтовую систему (см. [Альпин, 1966], с. 51 – 54). Там же доказано, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \frac{1}{dl_M^{\text{сл}}} \cdot \left[\mathsf{v}_{\text{ур}}\mathbf{1}_M\right] \cdot \left|\operatorname{grad}^S \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{сл}}\right| = \frac{-1}{dl_M^{\text{сл}}} \cdot \left[\mathbf{1}_M \operatorname{grad}^S \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{сл}}\right]. \tag{1.90}$$

Следовательно, ротор вектора **M** равен двухмерному градиенту напряжения на нормальном слое единичной средней толщины, умноженному векторно на единичный вектор по направлению поля **M**.

Из изложенного выше следует, что ротор вектора **M** имеет направление линий L^M, которые, следовательно, являются векторными линиями l_{rotM} поля rot **M**. Векторные трубки в этом поле (поле вектора rot **M**) имеют формы колец.

Если в некоторой области Θ $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$, то согласно (1.90) в пределах этой области поверхности S_M, содержащиеся в слое *сл*, нигде не обрываются. В этом случае поле **M** в области Θ является *л а м е л л а р н ы м*, т. е. слоистым, так как оно разделяется на слои неизменного (вдоль слоя) поперечного напряжения $\mathcal{E}^{\text{сл}}$.

О д н о с в я з н о й называется область, в которой любой замкнутый контур $l[S]$ может быть стянут в точку без выхода контура из этой области, т. е, без пересечения им её границы. *М н о г о с в я з н о й* оказывается любая односвязная область, если из неё изъять кольца или линии, не обрывающиеся (в частности замыкающиеся) внутри области. В случае изъятия одного кольца или одной замкнутой линии получается *д в у х с в я з н а я* область.

Если в односвязной области Θ поле **M** ламеллярно, то согласно (1.23) циркуляция вектора **M** по любому контуру $l[S]$ в этой области равна нулю, так как поверхность S может быть проведена полностью внутри области Θ, т. е. там, где $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$. В неодносвязной области, несмотря на ламеллярность поля **M** в ней, могут быть контуры, по которым циркуляция отлична от нуля, и, в частности, замкнутые линии l_M. В такой области поле **M** имеет многозначный потенциал (см. раздел III, § 3 главы пятой).

Там, где поверхности S_M обрываются, вектор rot **M** отличен от нуля; он направлен по линиям L^M их обрыва и пропорционален густоте этих линий. Вокруг этих замкнутых векторных линий l_{rotM} поля rot **M** (т. е. вокруг линий L^M) и определяемых ими кольцевидных векторных трубок этого поля образуются замкнутые линии l_M поля **M**. Линии l_M и L^M взаимно сцеплены. В кольцевидных областях пространства, занятых линиями L^M, т. е. в векторных трубках поля вектора rot **M**, находятся возбудители поля **M** с замкнутыми линиями l_M. Такие поля и их возбудители называют *в и х р е в ы м и*. Вихревые возбудители поля называют также вихрями или источниками вихревого типа.

Говоря о поле **M** во всём пространстве (о «полном поле»), часто называют его *вихревым*, если где-либо $\operatorname{rot}\mathbf{M}\neq 0$ и *чисто вихревым*, если, кроме того, всюду $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$. Рассматривая поле **M** в отдельной области V, называют его (в более узком смысле) вихревым в этой области, если в ней $\operatorname{rot}\mathbf{M}\neq 0$, и *чисто вихревым*, если в ней, кроме того, $\operatorname{div}\mathbf{M}=0$.

В аналогичном смысле можно пользоваться термином «дивергентное поле» и, в частности, называть поле *чисто дивергентным* в области V, если в ней $\operatorname{div}\mathbf{M}\neq 0$, а $\operatorname{rot}\mathbf{M}=0$.

Из сказанного следует, что ротор поля **M**, плотность возбудителей поля вихревого типа можно рассматривать как меру нарушения ламеллярности поля **M**. Ламеллярность – геометрическая интерпретация отсутствия возбудителей вихревого типа.

IV. Замечания

1. В области Θ, в которой поле **M** коллинеарно некоторой прямой, имеем согласно (1.88) и (1.90)

$$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{\partial M}{\partial l_M},\quad \operatorname{rot}\mathbf{M}=\left[\nu_{\text{ур}}\,\mathbf{1}_M\right]\cdot\frac{\partial M}{\partial \nu_{\text{ур}}}=-\left[\mathbf{1}_M\,\operatorname{grad}^S M\right]. \qquad (1.91)$$

В этом поле проявляются с наибольшей простотой представления о дивергенции и роторе как о производных, характеризующих поле соответственно по его направлению и в поперечных к нему направлениях. Действительно, согласно (1.91) дивергенция определяет изменение величины M вдоль прямых l_M, а ротор – её изменения в плоскостях S_M.

2. В поле **M** с кривыми линиями l_M или поверхностями S_M значения M меняются от точки к точке и там, где нет возбудителей поля. При этом изменение густоты линий l_M и поверхностей S_M происходит не за счёт обрывов некоторых из них, а за счёт их веерообразной формы, благодаря которой расстояния между соседними линиями l_M меняются по направлению поля, а между соседними поверхностями S_M – по направлениям, нормальным полю (см. рис. 1.11, *а*, *б*).

3. В общем случае согласно (1.88) и (1.90) дивергенция и ротор вместо изменений величины M определяют изменение вдоль линий l_M потока $M{\cdot}dS_M$ в векторной трубке и изменение по поверхностям S_M напряжения $M{\cdot}dl_M$ между ними. Благодаря множителям dS_M и dl_M производные div **M** и rot **M** определяют только те изменения поля **M** в окрестности точки a, которые отражают присутствие в этой окрестности возбудителей поля.

4. На рис. 1.11 показаны в системе r, φ, z спектры линий l_M и поверхностей S_M для трёх полей **M**:

а) $\mathbf{M}=\mathbf{1}_r{\cdot}r$ при $r\le a$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_r{\cdot}a^2/r$ при $r\ge a$, $(\operatorname{rot}\mathbf{M}=0)$;

б) $\mathbf{M}=\mathbf{1}_\varphi{\cdot}r$ при $r\le a$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_\varphi{\cdot}a^2/r$ при $r\ge a$, $(\operatorname{div}\mathbf{M}=0)$;

в) $\mathbf{M}=\mathbf{1}_z{\cdot}z$ при $|z|\le a$, $\mathbf{M}=\mathbf{1}_z{\cdot}a{\cdot}\operatorname{sgn} z$ при $|z|\ge a$, $(\operatorname{rot}\mathbf{M}=0)$.

В примерах на рис. 1.11, *а*, 1.11, *в* поле **M** пропорционально статическим полям **f** (см. главу вторую), которые создают однородные объёмные массы: в форме (соответственно) неограниченного по высоте кругового цилиндра с осью Z и с радиусом a и в форме неограниченного по простиранию плоскопараллельного слоя с мощностью $2{\cdot}a$, с серединой слоя в плоскости $z=0$. В примере на рис. 1.11, *б* поле **M** пропорционально магнитному полю **B** однородного объёмного тока I по направлению оси неограниченного по высоте кругового цилиндра с осью Z и с радиусом a. В этом можно убедиться, пользуясь формулами (2.78), (5.26) в главах второй и пятой.

В примере на рис. 1.11, *а* поверхности S_M (цилиндрические, $r=\text{const}$) нигде не обрываются, линии l_M располагаются по лучам (координатным линиям) l_r. При $r>a$ линии l_M не обрываются, но их густота уменьшается по направлению поля **M** за счёт веерообразной формы их спектра. В области $r<a$ (где $\operatorname{div}\mathbf{M}>0$) равномерно распределены начала g_+^M линий l_M (источники поля **M**).

В примере на рис. 1.11, *б* линии l_M (окружности $r=\text{const}$, $z=\text{const}$) нигде не обрываются, а поверхности S_M располагаются по полуплоскостям $\varphi=\text{const}$. При $r>a$ поверхности S_M не обрываются, но их густота уменьшается по направлениям l_r, нормальным полю **M**, за счёт веерообразной формы спектра поверхностей S_M. В области $r<a$, (где $|\operatorname{rot}\mathbf{M}|>0$) равномерно распределены линии L^M обрыва поверхностей S_M (вихревые возбудители поля **M**), параллельные оси Z.

В примере на рис. 1.11, *в* поле **M** – одномерно, поверхности S_M (плоскости $z = \text{const}$) нигде не обрываются, а линии l_M коллинеарны оси Z. При $|z| > a$ линии l_M не имеют обрывов и их густота не меняется. В области $|z| < a$ (где $\operatorname{div} \mathbf{M} > 0$) равномерно распределены начала g_+^M линий l_M.

5. Вихревое поле, коллинеарное некоторой прямой, можно иллюстрировать следующим примером. Пусть **M** – скорость течения воды с юга на север в средней (по ширине) части широкого канала глубиной h. Возьмём декартову систему с началом O на дне канала и с осями X, Y, Z, направленными вверх, на восток и на север соответственно. Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x) = \mathbf{1}_z \cdot c \cdot x^\alpha$, где $\alpha > 0$, $c > 0$, $0 \le x \le h$ (рис. 1.13). Скорость равна нулю на дне канала, а с уменьшением глубины $h - x$ увеличивается до $c \cdot h^\alpha$ у поверхности воды. В этом поле **M** векторные линии l_M – (неограниченные) прямые, направленные на север (по оси Z), поверхности S_M – полосы разной ширины с горизонтальными краями, лежащими в вертикальных плоскостях $z = \text{const}$. Края каждой полосы, смыкаясь при $y = \pm\infty$, образуют линию L^M. Её верхняя половина лежит на поверхности воды и направлена на восток, а нижняя – на некоторой глубине и направлена на запад. В соответствии с (1.27) $\operatorname{rot} \mathbf{M} = -\mathbf{1}_y \cdot dM/dx$, что согласуется с $(1.91)_2$, так как вектор $\boldsymbol{\nu}_{\text{ур}}$ направлен вверх и, следовательно,

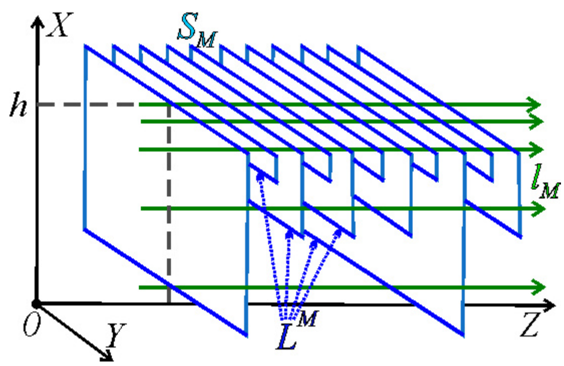


Рис. 1.13.
Плоскости S_M и линии l_M вихревого поля **M**, коллинеарного оси Z системы x, y, z

$$[\boldsymbol{\nu}_{\text{ур}}\ \mathbf{1}_M] = [\mathbf{1}_x\ \mathbf{1}_z] = -\mathbf{1}_y, \quad \text{а} \quad \partial M/\partial \nu_{\text{ур}} = \partial M/\partial x.$$

Таким образом, $\operatorname{rot} \mathbf{M} = -\mathbf{1}_y \cdot c \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Это квазипотенциальное поле $\mathbf{M} = \Lambda \cdot \operatorname{grad} T$, где $\Lambda = c \cdot x^\alpha$, $T = z$, $(\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M}) = 0$, так как скалярное произведение $(\mathbf{1}_z\ \mathbf{1}_y) = 0$.

6. Теперь учтем дополнительную скорость $\mathbf{M}' = \mathbf{1}_y \cdot c'$ движения воды, связанную с вращением Земли, и получим суммарную скорость $\mathbf{M}'' = \mathbf{M} + \mathbf{M}' = \mathbf{1}_z \cdot c \cdot x^\alpha + \mathbf{1}_y \cdot c' = \Lambda \cdot \operatorname{grad} T + \operatorname{grad} \Phi$, где $\Phi = c' \cdot y$. Очевидно, что $(\mathbf{M}'' \operatorname{rot} \mathbf{M}'') \ne 0$, т. е. поле **M''** не квазипотенциальное. Действительно, $\operatorname{rot} \mathbf{M}'' = \operatorname{rot} \mathbf{M}$, поэтому

$$(\mathbf{M}''[\nabla\ \mathbf{M}'']) = (\mathbf{M}\ [\nabla\ \mathbf{M}]) + (\mathbf{M}'[\nabla\ \mathbf{M}]) = -(\mathbf{1}_y\ \mathbf{1}_y) \cdot c \cdot c' \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} = -c \cdot c' \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

7. Ввиду большой технической трудности задачи изображения поля **M** линиями l_M или поверхностями S_M от фактического выполнения этой задачи обычно приходится воздерживаться, за исключением очень простых случаев (плоских полей вне областей занятых их возбудителями). При $\operatorname{div} \mathbf{M} \ne 0$ или $\operatorname{rot} \mathbf{M} \ne 0$ необходимо было бы как-то изобразить непрерывное изменение густоты линий l_M или поверхностей S_M, что крайне трудно даже в случае плоского поля. Но идея изображения векторного поля с помощью линий l_M и поверхностей S_M весьма полезна для выработки конкретного (геометрического) представления о производных поля ($\mathrm{div}\,\mathbf{M}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$) и их связи с возбудителями поля.

8. Существование полей **M** обусловлено наличием их возбудителей (источников, вихрей), которые, как выяснится в следующих главах, определяются массами, зарядами, токами (и их носителями, например, поляризованными телами, токовыми контурами). Поэтому говорят, что массы, заряды, токи (их носители) создают, порождают, возбуждают поля **M**, а также их потенциалы U и **A**.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Для заданного поля **M** дивергенция и ротор вектора **M** являются некоторыми функциями $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$, которые определяются этим полем по формулам (1.32') и (1.26). Можно, наоборот, искать поле **M**, дивергенция и ротор которого равны заданным функциям $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$. В таком аспекте равенства

$$\text{I.}\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{M}=\mathbf{W}(a),\qquad \text{II.}\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{M}=w(a) \tag{1.92}$$

представляют собой уравнения поля **M**. Любое векторное поле, обращающее эти уравнения в тождества, при заданных функциях $\mathbf{W}(a)$ и $w(a)$ является решением системы уравнений (1.92). Правые части уравнений (1.92), определяющие влияние возбудителей поля, находящихся в области V, на решения этих уравнений, называют *ф у н к ц и я м и   в о з б у ж д е н и я.*

I. Системы уравнений безвихревого и чисто вихревого полей

Система (1.92) упрощается для области V, в которой поле **M** не имеет вихрей или источников. В первом случае имеем в области V ламелларное поле, удовлетворяющее системе

$$\text{I.}\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{M}=0,\qquad \text{II.}\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{M}=w(a), \tag{1.93}$$

а во втором случае – соленоидальное поле, удовлетворяющее системе

$$\text{I.}\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{M}=\mathbf{W}(a),\qquad \text{II.}\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{M}=0. \tag{1.94}$$

Согласно (1.62) и (1.74') решениями уравнений $(1.93)_1$ и $(1.94)_2$ являются соответственно

$$\mathbf{M}=-\,\mathrm{grad}\,U,\qquad \mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{1.92'}$$

Подставляя $(1.92')_1$ в $(1.93)_2$, а $(1.92')_2$ в $(1.94)_1$, получаем вместо систем (1.93) и (1.94)

$$\nabla^2 U=-\,w(a), \tag{1.93'}$$

$$[\nabla\,[\nabla\mathbf{A}]]=\mathbf{W}(a). \tag{1.94'}$$

Принимая во внимание (1.80') и полагая $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0$ (см. раздел VI, § 5), имеем вместо (1.94')

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\,\mathbf{W}(a). \tag{1.94''}$$

Таким образом, каждая из систем (1.93), (1.94) уравнений первого порядка для поля **M** сводится к одному уравнению второго порядка для потенциала (U, **A**) этого поля.

Наиболее простой вид

$$\text{I. } \operatorname{rot}\mathbf{M}=0, \quad \text{II. } \operatorname{div}\mathbf{M}=0 \qquad (1.95)$$

принимает система (1.92) для области V, в которой нет ни вихрей, ни источников, т. е. для области, в которой поле является и ламелларным, и соленоидальным.

Рассматривая систему (1.95) как частный вид системы (1.93) или (1.94), приходим соответственно к уравнению $\nabla^2 U = 0$ или $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$.

II. Прямая и обратная задачи

Будем различать две задачи теории векторного поля **M**: прямую и обратную. *Прямая задача* состоит в определении поля вектора **M** по заданным его возбудителям, а *обратная задача* – в определении возбудителей заданного поля **M**. Задание или определение возбудителей означает задание или определение плотностей источников и вихрей поля **M**, т. е. функций $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$ и величин, заменяющих эти функции там, где они теряют смысл (см. раздел IV, § 4).

Посмотрим, в какой же мере поле **M** определяется заданием его ротора и дивергенции, т. е. функции $\mathbf{W}(a)$ и $w(a)$ в области V. Иначе говоря, выясним, в какой мере поле **M** определяется системой (1.92). Допустим, что **M'** и **M''** – два векторных поля, каждое из которых удовлетворяет этой системе. Ввиду её линейности из этого следует, что поле $\mathbf{M}''' = \mathbf{M}'' - \mathbf{M}'$ должно удовлетворять системе $\operatorname{rot}\mathbf{M}''' = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{M}''' = 0$. Следовательно, система уравнений (1.92) определяет поле **M** с точностью до произвольно взятого частного решения однородной системы (1.95). Таким образом, система (1.92) определяет только ту часть поля **M**, которую создают возбудители, находящиеся в области V, т. е. она определяет поле **M** с точностью до любого поля, создаваемого в области V какими-либо возбудителями, произвольно распределёнными вне области V. В частности, это справедливо для систем (1.93) и (1.94). В соответствии с этим уравнения (1.93') и (1.94') для потенциалов U и **A** определяют эти потенциалы с точностью до потенциалов полей, создаваемых какими-либо возбудителями, произвольно размещенными вне области V.

Ниже будет сказано о дополняющих условиях, с помощью которых устраняется указанная неполнота определения поля **M** системами (1.93) и (1.94) и уравнениями (1.93') и (1.94'). Но следует иметь в виду также несущественную (не связанную с возможным присутствием возбудителей вне области V и не отражающуюся на поле **M**) неполноту определения потенциалов (U, **A**), обусловленную тем, что соотношениями (1.92') потенциал U определяется с точностью до постоянной (до постоянного слагаемого – скалярного поля $C = \text{const}$), а потенциал **A** – с точностью до градиента произвольного скаляра.

Решение *обратной задачи теории поля* не вызывает затруднений.

В теории геофизической разведки обратная задача ставится иначе, чем в теории поля: по данным о поле в точках некоторой области, поверхности или линии требуется определить возбудители поля или свойства среды, от которых они зависят, в области пространства, в которой поле нам неизвестно. В такой постановке обратная задача является очень трудной. Решение её обычно оказывается *многозначным*, из-за отсутствия сведений, достаточных для единственности этого решения (см. ниже). Здесь имеется в виду принципиальная многозначность, а не практическая, связанная с погрешностью результатов наблюдения и неустойчивостью решения задачи.

Для нахождения плотности возбудителей поля там, где оно известно, достаточно, выполнить соответствующие дифференцирования его компонент согласно (1.26) и (1.32').

Прямая задача осложняется обычно возникающей необходимостью решить её при отсутствии непосредственных данных о возбудителях поля или их части. Данные о возбудителях, находящихся вне области V, в которой определяют поле, заменяются сведениями о поле у границы этой области, а вместо находящихся внутри области V возбудителей, зависящих от поля и среды, задаются некоторые функции Λ (ε, μ, γ), являющиеся параметрами этой среды. Применению дифференциальных уравнений поля к решению прямой задачи в такой постановке будет уделено внимание здесь и в следующих главах.

Учёт влияния среды приводит к замене уравнений (1.93') и (1.94') уравнениями более общего вида:

$$\left(\nabla\left(\Lambda\nabla U\right)\right) = -w^{v}(a), \quad \left[\nabla\,\frac{[\nabla\,\mathbf{A}]}{\Lambda}\right] = \mathbf{W}^{v}(a), \tag{1.96}$$

где $\Lambda = \Lambda(a)$ – параметр, характеризующий среду, а $w^{v}(a)$ и $\mathbf{W}^{v}(a)$ – функции возбуждения, аналогичные функциям $w(a)$ и $\mathbf{W}(a)$ в уравнениях (1.93'), (1.94').

III. Выбор частного решения

Применение уравнения в частных производных $(1.96)_1$ или $(1.96)_2$ для решения прямой задачи теории поля сводится к определению потенциала U или $\mathbf{A}$ как одного из частных решений этого уравнения. Бесчисленное множество частных решений этого уравнения соответствует множеству полей, получающихся в области V при различных совокупностях возбудителей поля, находящихся вне этой области, и одинаковых возбудителях внутри неё.

Предполагается, что задана некоторая физическая ситуация (совокупность физических условий) и требуется определить то поле, которое мы фактически имели бы в области V при осуществлении этой ситуации. Заданная физическая ситуация включает функцию w^{v} или $\mathbf{W}^{v}$ и параметр среды Λ в области V, а также – сведения о потенциале в некоторых точках этой области и на ограничивающей её поверхности $S[V]$. Этими сведениями можно воспользоваться для формулировки условий, которым, кроме соответствующего дифференциального уравнения, должен удовлетворять искомый потенциал. Без таких «дополняющих» уравнение условий формулировка задачи была бы неполной, так как это уравнение (с подстановкой функции w^{v} или $\mathbf{W}^{v}$ и параметра среды Λ) допускает бесчисленное множество частных решений. Нам же нужно только одно из них, а именно потенциал того поля **M**, которое мы фактически имели бы в области V при осуществлении заданной физической ситуации.

В общем случае из физических условий задачи можно извлечь больше условий, касающихся искомого решения для U или $\mathbf{A}$, чем необходимо для определения этого решения. Тем не менее, вопрос о совместности дополняющих условий, т. е. о существовании удовлетворяющего им частного решения дифференциального уравнения, можем не рассматривать, В существовании такого решения мы может быть уверены, так как (в геофизике) предполагается, что задаваемая физическая ситуация является реальной, т. е. практически осуществимой. Каждой такой ситуации, очевидно, соответствует некоторое вполне определённое поле. Поэтому, если решение задачи определяется частью дополняющих условий, то функция U или $\mathbf{A}$, удовлетворяющая этой части условий, будет удовлетворять также всем остальным дополняющим условиям.

Весьма важным является вопрос о достаточности поставленных дополняющих условий, так как может оказаться, что их совокупностью решение задачи определяется не полностью, неоднозначно. Иначе говоря, может оказаться, что существуют различные частные решения уравнения, удовлетворяющие сформулированной совокупности дополняющих условий и, следовательно, определив по этим условиям некоторую функцию U или $\mathbf{A}$, мы не можем утверждать, что именно она представляет собой искомый потенциал, т. е. потенциал того поля, которое существовало бы при заданной физической ситуации.

Отсюда следует необходимость теоремы единственности, устанавливающей типы дополняющих условий, достаточных для обеспечения единственности решения уравнения $(1.96)_1$ или $(1.96)_2$. Такие теоремы практически необходимы в качестве опоры при решении поставленной выше задачи потому, что обычно, мы ищем её решение, по существу, *п о д б о р о м*.

Совокупность дополняющих условий должна служить гарантией того, что именно то частное решение, которое им удовлетворяет, является потенциалом (U, $\mathbf{A}$) искомого поля. Для этого годится только такая совокупность дополняющих условий, относительно которой известно, что ей может удовлетворить только одно из частных решений, т. е. что две функции, удовлетворяющие уравнению и такой совокупности (дополняющих) условий, должны совпадать во всей области V, для которой решается поставленная задача.

В следующем параграфе будут выведены «достаточные» в указанном здесь смысле совокупности дополняющих условий для уравнений потенциалов (1.96). Некоторые из этих условий задаются у границы (на краях) области V, т. е. на поверхности $S[V]$. Задачи с такими («краевыми») условиями называют *к р а е в ы м и з а д а ч а м и*. Особым является случай, когда функция возбуждения равна нулю и $\Lambda = \text{const}$ в области V, т. е. когда уравнения (1.96) вырождаются в уравнения Лапласа ($\nabla^2 U = 0$ или $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$) и прямая задача сводится к поиску гармонической функции, удовлетворяющей краевым условиям.

В качестве примера решения прямой задачи для этого особого случая приведём определение по «методу сеток» функции U, гармонической в области V и принимающей заданные значения на поверхности $S[V]$ (решение задачи Дирихле, см. замечание 14 в § 8). Согласно (1.71), функция U в точке a имеет значение, равное среднему из её значений, в шести соседних точках $a_1, a_2, ..., a_6$ достаточно детальной кубической сетки. Для приближённого численного определения функции U в области V заменим её совокупностью значений U в N точках кубической сетки и составим для них N линейных уравнений:

$$6U_{i0} = \sum_{j=1}^{6} U_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., N), \tag{1.93''}$$

где индексом $j = 0$ отмечается значение U, соответствующее какому-либо некраевому элементу сеточной модели области V, а индексами $j = 1, 2, ..., 6$ – значения U, соответствующие шести соседним элементам.

В уравнениях (1.93") некоторые члены с разными индексами соответствуют одним и тем же элементам сетки, а члены, соответствующие краевым элементам модели области V, считаются известными (по значениям U на $S[V]$). Остающиеся неизвестными N значений U_{ij} определяются системой (1.93").

IV. Замечания

1. То, что решение находят подбором функций, ни в какой мере не умаляет строгости полученного результата.

2. Поиски нужной функции фактически осуществляются на основе физических соображений, опыта решённых ранее задач и с применением разработанных методов, имеющих более или менее общий характер (метод разделения переменных, метод изображений, применение функции Грина и т. д.).

3. Нужное частное решение обычно намечают в неокончательном виде, с множителями, подлежащими определению с помощью дополняющих условий, применение которых сводится к получению уравнений, позволяющих определить эти множители.

4. Процессу построения решения обычно придают весьма стройный вид. Наводящий характер некоторых доводов не подчёркивается. В связи с этим становится незаметной важная роль теоремы единственности, решающее значение необходимости удовлетворения построенным решением условиям единственности. Это может привести к недоразумениям и к ошибочному распространению способов решения за пределы их применимости, основанной на теореме единственности (см. [Альпин, 1971], с. 244, 245).

5. Для искомой функции можно получить интегральное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению и условиям, обеспечивающим единственность его решения. Найти решение этого интегрального уравнения в принципе можно, не прибегая к подбору (см. главу четвёртую). Применение интегральных уравнений для определения поля приводит к весьма сложным выражениям и громоздким вычислениям. Но при современной технике счёта это обстоятельство не имеет решающего значения.

6. Соответствие некоторого частного решения дифференциального уравнения в частных производных (1.96) конкретным условиям решаемой прямой задачи гарантируется выполнением соответствующих условий единственности, независимо от способа, которым найдено это частное решение (пусть оно даже взято *наугад*).

§ 8. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Выведем отдельно условия единственности для уравнений $(1.96)_1$ и $(1.96)_2$.

I. Условия единственности решения уравнения скалярного потенциала

Представим себе, что мы ищем для области V потенциал U, удовлетворяющий уравнению $(1.96)_1$. Допустим, что, исходя из заданной физической ситуации, мы не только знаем функции $w^v(a)$ и $\Lambda(a)>0$, входящие в это уравнение, но можем также извлечь некоторую совокупность дополняющих его условий, содержащую в общем случае «краевые» условия, касающиеся функции U у границы $S[V]$ области V, а также некоторые условия для этой функции внутри области V (рис. 1.14, *а*).

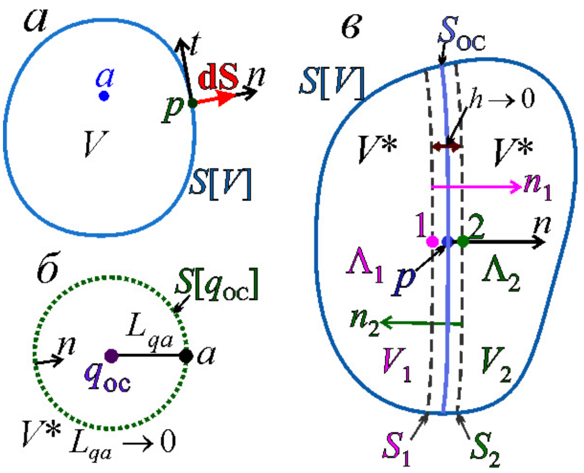


Рис. 1.14.
К теореме единственности решения прямой задачи

Допустим, что какие-либо две функции $U'(a)$ и $U''(a)$ удовлетворяют в области V уравнению $(1.96)_1$ с подстановкой заданных функций $w^v(a)$ и $\Lambda(a)$, а также заданным дополняющим условиям.

Рассмотрим функцию

$$U'''(a) = U''(a) - U'(a). \tag{1.97}$$

Так как в области V

$$\left(\nabla\left(\Lambda\nabla U'\right)\right) = -w^v(a) \quad \text{и} \quad \left(\nabla\left(\Lambda\nabla U''\right)\right) = -w^v(a), \tag{1.98}$$

то (ввиду линейности уравнения $(1.96)_1$) в этой области функция U''' удовлетворяет в области V однородному уравнению

$$\left(\nabla\left(\Lambda\nabla U'''\right)\right) = 0. \tag{1.98'}$$

Полагая, что скаляры Λ и U и вектор $\nabla U = \operatorname{grad} U$ непрерывны в области V и, следовательно, в ней непрерывно также произведение

$$U\cdot\Lambda\cdot\nabla U = \mathbf{X}, \tag{1.99}$$

будем считать, что скаляр U''', вектор $\nabla U'''$ и произведение

$$U'''\cdot\Lambda\cdot\nabla U''' = \mathbf{X}''' \tag{1.99'}$$

также непрерывны в этой области и дивергенция вектора $\mathbf{X}'''$ не теряет в ней смысла. Имея это в виду, применим к вектору $\mathbf{X}'''$ в этой области теорему Гаусса – Остроградского (1.30):

$$\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}) = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{X}'''dV, \text{ то есть } \oint\limits_{S[V]} U'''\cdot\Lambda\cdot\left(\nabla U'''\,\mathbf{dS}\right) = \int\limits_V \operatorname{div}\left(U'''\cdot\Lambda\cdot\nabla U'''\right)dV.$$

Так как производная произведения U''' и $\Lambda\cdot\nabla U'''$

$$\operatorname{div}(U'''\cdot\Lambda\cdot\nabla U''') = (\nabla(\{U'''\}\cdot\{\Lambda\cdot\nabla U'''\})) = \nabla U'''\cdot\Lambda\cdot\nabla U''' + U'''\cdot(\nabla(\Lambda\cdot\nabla U'''))$$

получаем равенство

$$\oint_{S[V]} U'''\cdot\Lambda\cdot(\nabla U'''\mathbf{dS}) = \int_V \Lambda\cdot(\nabla U''')^2\,dV + \int_V U'''\cdot(\nabla(\Lambda\nabla U'''))dV. \quad (1.100)$$

Принимая во внимание выражение (1.98'), согласно которому второе слагаемое в правой части (1.100) равно нулю, и учитывая, что

$$(\nabla U\,\mathbf{dS}) = (\mathbf{n}\nabla U)dS = (\operatorname{grad} U)_n dS = \frac{\partial U}{\partial n}dS,$$

(где $\mathbf{n} = \mathbf{1}_n$) получаем из (1.100)

$$\oint_{S[V]} U'''\cdot\Lambda\cdot\frac{\partial U'''}{\partial n}dS = \int_V \Lambda\cdot(\nabla U''')^2\,dV. \quad (1.100')$$

Если из краевых условий на $S[V]$ следует, что левая часть равенства (1.100')

$$\oint_{S[V]} U'''\Lambda\frac{\partial U'''}{\partial n}dS = 0, \quad (1.101)$$

то и в правой части (1.100') интеграл обращается в нуль. Величины Λ и $(\nabla U''')^2$ не могут иметь отрицательных значений, поэтому из равенства нулю этого интеграла следует, что в области V

$$\nabla U''' = 0, \quad U''' = C, \quad U'' = U' + C, \quad (1.102)$$

где C – постоянная (однородное скалярное поле), т. е. величина, не зависящая от положения точки наблюдения a в области V. Если бы из заданных условий можно было бы ещё заключить, что в какой-либо точке a_1 внутри области V или на её границе $S[V]$

$$U'''(a_1) = 0, \quad (1.103)$$

то из этого следовало бы, что $C = 0$ и, следовательно, $U'' = U'$, т. е. функции U'' и U' полностью совпадают во всей области V.

Можно видеть, что левая часть (1.100') обращается в нуль, если функция U''' удовлетворяет одному из следующих трёх условий:

$$U''' = 0 \ \text{ на } \ S[V], \quad (1.104)$$

$$\frac{\partial U'''}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ S[V], \quad (1.105)$$

$$\oint_{S[V]} \Lambda\cdot\frac{\partial U'''}{\partial n}dS = 0, \ \text{ причём } \ \frac{\partial U'''}{\partial t} = 0 \ \text{ на } S[V], \quad (1.106)$$

где t – любое тангенциальное направление на поверхности $S[V]$ (см. рис. 1.14, *а*). Таким образом, условие (1.101) может быть заменено любым из трёх условий (1.104) – (1.106). Условие (1.106) представляет собой совокупность двух условий, из которых второе позволяет вынести множитель U''' подынтегральной функции в левой части (1.101) за знак интеграла, после чего получаем интеграл, который, в силу первого из этих условий, равен нулю:

$$\oint\limits_{S[V]} U''' \cdot \Lambda \cdot \frac{\partial U'''}{\partial n} dS = U''' \cdot \oint\limits_{S[V]} \Lambda \cdot \frac{\partial U'''}{\partial n} dS = 0.$$

Условие (1.104) содержит условие (1.103).

Представим себе, что из физических условий задачи следует, что искомая функция U должна удовлетворять одному из следующих трёх краевых условий:

$$\text{I.}\quad U(p) = \zeta(p), \tag{1.104'}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial U}{\partial n}(p) = \varphi(p), \tag{1.105'}$$

$$\text{III.}\quad \oint\limits_{S[V]} \Lambda \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = Q, \text{ причём } [\mathbf{n} \nabla U(p)] = \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \tag{1.106'}$$

где p – точка на границе $S[V]$ области V; $\zeta(p)$, $\varphi(p)$ – некоторые, известные нам из физических условий задачи, функции положения точки p на поверхности $S[V]$; Q – известное нам из этих же условий значение потока вектора $\Lambda \cdot \mathrm{grad}\, U$ через поверхность $S[V]$.

Очевидно, что если функции (скалярные поля) U' и U'' удовлетворяют условию (1.104'), (1.105') или (1.106'), то функция U''' удовлетворяет соответственно условию (1.104), (1.105) или (1.106). Действительно, если, например, $U'(p) = \zeta(p)$ и $U''(p) = \zeta(p)$, то $U'''(p) = 0$. Таким образом, условиям (1.104), (1.105), (1.106) для U''' соответствуют условия (1.104'), (1.105'), (1.106') для U. Условию (1.103) для U''' соответствует задание значения U_1 функции U в какой-либо точке a_1 области V или её границы $S[V]$:

$$U(a_1) = U_1. \tag{1.103'}$$

Условие (1.104') содержит (1.103'). Следовательно, любого из условий (1.104') – (1.106') достаточно на поверхности $S[V]$ для обеспечения однозначности решения уравнения $(1.96)_1$ с точностью до постоянного слагаемого C, которое обращается в нуль, когда удовлетворяется условие (1.104'), или одного из условий (1.105'), (1.106'), дополненного условием (1.103'). Следует иметь в виду, что даже однозначность решения уравнения $(1.96)_1$ с точностью до постоянного слагаемого C означает полную однозначность определения поля $\mathbf{M} = -\mathrm{grad}\, U$.

Выше мы полагали, что функции Λ, U и ∇U непрерывны в области V и поэтому векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'''$ также непрерывны в этой области. На этом основании мы применяли теорему Гаусса – Остроградского (1.30) к вектору $\mathbf{X}'''$ и области V. Но в общем случае в области V могут находиться особые точки $q_{\text{ос}}$ (рис. 1.14, *б*), линии $l_{\text{ос}}$ и поверхности $S_{\text{ос}}$ (рис. 1.14, *в*), у которых непрерывность функций Λ, U и ∇U (хотя бы некоторых из них) нарушается. При этом справедливость предположений о непрерывности векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'''$ в области V не является очевидной и может даже не соответствовать действительности.

Для того, чтобы изложенный вывод условий единственности оставался справедливым, несмотря на указанное осложнение, окружим особые поверхности, линии и точки «поверхностями безопасности» $S[S_{\text{ос}}]$, $S[l_{\text{ос}}]$, $S[q_{\text{ос}}]$

и будем вместо области V рассматривать область V^*, совпадающую с областью V без её частей, заключенных внутри поверхностей безопасности. В соответствии с этим мы должны в (1.100), (1.100'), (1.101) подставить вместо области V область V^*, а вместо поверхности $S[V]$ границу $S[V^*]$ области V^*, состоящую из поверхности $S[V]$ и совокупности поверхностей безопасности, на которых нормали n должны быть направлены наружу относительно области V^*. Стягивая поверхности безопасности к особым точкам, линиям и поверхностям, которые они окружают, сведём к нулю объёмы областей, исключаемых из области V, и поэтому объёмное интегрирование будем по-прежнему производить по области V. Что же касается поверхностного интегрирования, то его надо будет распространить не только на поверхность $S[V]$, но также на совокупность стянутых поверхностей безопасности. Таким образом, вместо (1.100') получаем равенство

$$\oint\limits_{S[V]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)+\oint\limits_{S[S_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)+\oint\limits_{S[l_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)+\oint\limits_{S[q_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)=$$

$$=\int\limits_{V}\Lambda\cdot\left(\nabla U'''\right)^2 dV. \quad (1.100'')$$

Для того, чтобы из (1.100'') следовало нужное нам равенство (1.102), достаточно, чтобы, кроме краевых условий, обращающих в нуль первый из интегралов в левой части (1.100''), было соблюдено условие обращения в нуль потока вектора $\mathbf{X}'''$ через любую из поверхностей безопасности:

$$\oint\limits_{S[S_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)=0,\quad \oint\limits_{S[l_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)=0,\quad \oint\limits_{S[q_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)=0. \quad (1.107)$$

Подставляя в (1.48') вектор $\mathbf{X}'''$ вместо вектора $\mathbf{M}$, имеем

$$\oint\limits_{S[S_{\text{ос}}]}\left(\mathbf{X}'''\,\mathbf{dS}\right)=\int\limits_{S_{\text{ос}}}\operatorname{Div}\mathbf{X}'''\,dS=\int\limits_{S_{\text{ос}}}\operatorname{Div}\left(U'''\cdot\Lambda\cdot\nabla U'''\right)dS. \quad (1.108)$$

Следовательно, первому из условий (1.107) удовлетворим, если

$$\operatorname{Div}\left(U'''\cdot\Lambda\cdot\nabla U'''\right)=0 \quad \text{на} \quad S_{\text{ос}}. \quad (1.109)$$

Будем полагать, что на поверхностях $S_{\text{ос}}$ функции U, ∇U, Λ имеют ограниченные значения, и поэтому тангенциальная компонента X'''_τ вектора $\mathbf{X}'''$ также ограничена. Согласно (1.49), получаем из (1.109) требование

$$U'''^{(2)}\cdot\Lambda_2\cdot\left(\mathbf{n}\;\nabla U'''^{(2)}\right)=U'''^{(1)}\cdot\Lambda_1\cdot\left(\mathbf{n}\;\nabla U'''^{(1)}\right) \quad \text{на} \quad S_{\text{ос}}, \quad (1.109')$$

для выполнения которого достаточно, чтобы на каждой поверхности $S_{\text{ос}}$ удовлетворялась совокупность двух условий:

$$U'''^{(2)}=U'''^{(1)}, \qquad \Lambda_2\cdot\frac{\partial U'''^{(2)}}{\partial n}=\Lambda_1\cdot\frac{\partial U'''^{(1)}}{\partial n}. \quad (1.110)$$

Представим себе, что из физических условий задачи известны разрывы функций U и $\Lambda\cdot(\partial U/\partial n)$ на поверхности $S_{\text{ос}}$ и, следовательно, для этих функций имеем совокупность условий:

$$1.\ U^{(2)} - U^{(1)} = \zeta_{12}(p), \qquad 2.\ \Lambda_2 \cdot \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \Lambda_1 \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \varphi_{12}(p), \qquad (1.110')$$

где p – точка на поверхности $S_{\text{ос}}$; $\zeta_{12}(p)$ и $\varphi_{12}(p)$ – некоторые известные из физических условий задачи функции положения точки p на этой поверхности (рис. 1.14, *в*). Очевидно, что, если каждая из функций. U' и U'' удовлетворяет условиям (1.110'), то их разность U''' удовлетворяет условиям (1.110) и, следовательно, условию $(1.107)_1$ на поверхности $S_{\text{ос}}$.

Если в каком-либо из условий (1.110') правая часть равна нулю, то его называют однородным, в противном случае – неоднородным.

Функцию U обычно представляют в областях V_1 и V_2, разделяемых поверхностью $S_{\text{ос}}$ (внутри области V), различными аналитическими выражениями ($U^{(1)}$ и $U^{(2)}$), которые должны «сопрягаться» на поверхности $S_{\text{ос}}$ в соответствии с *условиями сопряжения* (1.110').

Для того, чтобы функция U''' удовлетворяла условиям $(1.107)_2$ и $(1.107)_3$, достаточно, чтобы левая часть каждого из этих равенств принимала одно и то же значение при подстановке в неё вместо $\mathbf{X}'''$ векторов $U'\cdot\Lambda\cdot\nabla U'$ и $U''\cdot\Lambda\cdot\nabla U''$. Но величины U и ∇U у точек $q_{\text{ос}}$ и линий $l_{\text{ос}}$ принимают бесконечно большие значения. Поэтому здесь следует иметь в виду стремление функций U' и U'' к совпадению при приближении точки наблюдения к этим точкам и линиям. Следовательно, в качестве условия для функции U у особых точек и линий достаточно задание выражений для неё у этих точек и линий («особенностей» функции U).

Таким образом, получаем *теорему единственности решения уравнения* $(1.96)_1$, согласно которой решение определяется в области V с точностью до постоянной (постоянного слагаемого) C краевым условием одного из трёх типов ((1.104'), (1.105'), (1.106')) на границе $S[V]$ области V, двумя условиями сопряжения (1.110') на любой особой поверхности $S_{\text{ос}}$, находящейся внутри области V, и выражениями для U у всех особых точек и линий, находящихся в этой области, причём постоянная C определяется заданием значения потенциала U в какой-либо точке области V или на границе $S[V]$.

II. Замечания к теореме единственности решения уравнения скалярного потенциала

1. Для обеспечения однозначности решения можно на разных участках поверхности $S[V]$ задавать краевые условия различного типа. Но ни один из её участков не должен остаться без какого-либо из этих условий.

2. Условие III типа, как и условия других типов, применимо не только ко всей поверхности $S[V]$, но также к её отдельному участку.

3. Если хотя бы на одном участке поверхности $S[V]$ выполняется условие I типа, то потенциал U определяется полностью (константа $C = 0$).

4. Участками поверхности $S[V]$ могут быть отдельные поверхности, например две сферические поверхности, образующие границу области V в виде сферического слоя.

5. Дополняющие условия нельзя задавать произвольно, они должны следовать из физически осуществимых условий задачи. Произвольно наложенное на искомое решение условие может оказаться несовместным с другими дополняющими условиями и с уравнением $(1.96)_1$ при заданных функциях Λ и w^v (см. $(1.96)_1$).

6. Граница $S[V]$ области V может полностью или частично совпадать с бесконечно удалённой поверхностью. Иначе говоря, область V может быть неограниченной (по всем направлениям или по некоторым из них). В этом случае вместо тех или иных величин, например U, на поверхности $S[V]$ задаются асимптотические выражения этих величин, соответствующие удалению точки наблюдения на бесконечность (условие на бесконечности).

7. Выбор области V, для которой решается уравнение $(1.96)_1$, определяется не только частью пространства, в которой нас интересует поле **M** (его потенциал U). Необходимо эту *область выбирать так*, чтобы иметь возможность задать на, всей её границе $S[V]$ краевые условия. Это обстоятельство может нас заставить включить в область V часть пространства, в которой поле нас совсем не интересует.

8. Решение может быть представлено для разных частей области V различными аналитическими выражениями. Обычно поверхности, разграничивающие эти части области V, совпадают с поверхностями, особыми для искомого поля. Но они могут быть также не особыми. Бывают и такие случаи, когда для смежных частей области V, разграниченных особой для искомого поля поверхностью $S_{\text{ос}}$, функцию U представляют одним аналитическим выражением (функцией разрывной или имеющей разрывную нормальную к $S_{\text{ос}}$ производную).

9. Если части области V, для которых функция U представлена различными аналитическими выражениями, разграничены поверхностью, не являющейся особой, то для обеспечения единственности решения следует потребовать, чтобы на этой поверхности (как и на любой другой поверхности в области V) удовлетворялись условия сопряжения

$$U^{(2)} = U^{(1)}, \qquad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}, \tag{1.110''}$$

получающиеся из (1.110') при $\Lambda_2 = \Lambda_1$, $\zeta_{12}(p) = 0$, $\varphi_{12}(p) = 0$.

10. Условия сопряжения (1.110') и краевые условия (1.104') – (1.106') обычно объединяют под общим названием *граничных* (пограничных, краевых) *условий*.

11. Если $w^v = 0$ во всей области V и в ней нет особых линий, точек и поверхностей, кроме поверхностей разрыва параметра Λ, то в этой области, за исключением этих поверхностей, потенциал U должен удовлетворять однородному уравнению

$$(\nabla\,(\Lambda\cdot\nabla U)) = 0, \tag{1.111}$$

причём условия сопряжения (1.110') также становятся однородными:

$$U^{(2)} = U^{(1)}, \qquad \Lambda_2 \cdot \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \Lambda_1 \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}. \qquad (1.112)$$

12. Допустим, что в области V, о которой шла речь в замечании 11, функция U имеет значения U', а на её границе $S[V]$ величины ζ, φ и Q, входящие в краевые условия, имеют значения ζ', φ' и Q'. Если вместо U' потенциал U примет значения $U''=U'\cdot m$, где m – постоянный множитель, то на поверхности $S[V]$ величины ζ, φ и Q вместо значений ζ', φ' и Q' примут значения $\zeta''=m\cdot\zeta'$, $\varphi''=m\cdot\varphi'$ и $Q''=m\cdot Q'$. Согласно теореме единственности из этого следует также обратное. Когда величины ζ, φ, Q на поверхности $S[V]$ вместо значений ζ', φ', Q' принимают значения $m\cdot\zeta'$, $m\cdot\varphi'$, $m\cdot Q'$, то функция U должна во всей области V вместо значений U' иметь значения $m\cdot U'$. Следовательно, пропорциональные изменения значений правых частей краевых условий на границе $S[V]$ такой области V вызывают пропорциональные им изменения потенциалов U всех точек внутри этой области.

13. Из изложенного выше следует, что если в области V нет особых точек, линий и поверхностей и в ней всюду $w^v = 0$ и $\operatorname{grad}\Lambda = \nabla\Lambda = 0$, то поле в V полностью определяется краевыми условиями на поверхности $S[V]$. Но в такой области $(\nabla\,(\Lambda\cdot\nabla U)) = \Lambda\cdot\nabla^2 U = 0$, т. е. $\nabla^2 U = 0$. Следовательно, функция, гармоническая в области V, определяется в ней полностью значениями, которые она имеет на границе $S[V]$, и с точностью до постоянной C значениями нормальной производной этой функции на поверхности $S[V]$.

14. Задачи определения гармонической функции в области V по её значениям $U(p)$ или значениям её нормальной производной $\partial U(p)/\partial n$ на границе $S[V]$ этой области называют соответственно *задачей Дирихле* и *задачей Неймана*.

15. Если в области V функция $U(a) = C$, то в этой области она удовлетворяет уравнению Лапласа, а на её границе $S[V]$ – краевым условиям

$$U(p) = C, \qquad \frac{\partial U}{\partial n}(p) = 0. \qquad (1.113)$$

Следовательно, согласно теореме единственности функция, гармоническая в области V и удовлетворяющая на её границе C хотя бы одному из этих условий, равна постоянной C во всей области V. В частности, функция, гармоническая в области V и обращающаяся в нуль на её границе $S[V]$, равна нулю во всей области V.

III. Условия единственности решения уравнения векторного потенциала

Представим себе, что мы ищем для области V векторный потенциал $\mathbf{A}$, удовлетворяющий уравнению $(1.96)_2$. В соответствии с обозначением, применяемым в главе пятой, будем полагать $\Lambda = \mu$. Допустим, что, исходя из заданной физической ситуации, мы не только знаем функции $\mathbf{W}^v$ и μ, входящие в уравнение $(1.96)_2$, но можем также извлечь некоторую совокупность дополняющих его условий: краевые условия, касающиеся функции (поля) $\mathbf{A}$ у границы $S[V]$ области V и некоторые условия для этой функции внутри области V. Допустим, что две функции $\mathbf{A}'(a)$ и $\mathbf{A}''(a)$ удовлетворяют в области V уравнению $(1.96)_2$ с подстановкой заданных функции $\Lambda = \mu$ и $\mathbf{W}^v$, а также, заданным дополняющим условиям. Рассмотрим функцию

$$\mathbf{A}'''(a) = \mathbf{A}''(a) - \mathbf{A}'(a). \qquad (1.114)$$

Так как в области V

$$\left[\nabla \frac{[\nabla\, \mathbf{A}']}{\mu}\right] = \mathbf{W}^v(a) \quad \text{и} \quad \left[\nabla \frac{[\nabla\, \mathbf{A}'']}{\mu}\right] = \mathbf{W}^v(a), \qquad (1.115)$$

то в этой области функция $\mathbf{A}'''$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\nabla \frac{[\nabla\, \mathbf{A}''']}{\mu}\right] = 0. \qquad (1.115')$$

Полагая, что векторы $\mathbf{A}$, $[\nabla\, \mathbf{A}] = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ и скаляр μ непрерывны в области V, и, следовательно, в ней непрерывен вектор

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{A}\ \frac{[\nabla\, \mathbf{A}]}{\mu}\right], \qquad (1.116)$$

можем считать, что вектор

$$\mathbf{X}''' = \left[\mathbf{A}'''\ \frac{[\nabla\, \mathbf{A}''']}{\mu}\right] \qquad (1.116')$$

также непрерывен в этой области. Применяя к вектору $\mathbf{X}'''$ в области V теорему Гаусса - Остроградского (1.30), получаем

$$\oint\limits_{S[V]} \left(\left[\mathbf{A}'''\ \frac{[\nabla\, \mathbf{A}''']}{\mu}\right] \mathbf{dS}\right) = \int\limits_V \operatorname{div}\left[\mathbf{A}'''\ \frac{[\nabla\, \mathbf{A}''']}{\mu}\right] dV =$$

$$= \int\limits_V \frac{[\nabla\, \mathbf{A}''']^2}{\mu} dV + \int\limits_V \left(\mathbf{A}'''\left[\nabla\ \frac{[\nabla\, \mathbf{A}''']}{\mu}\right]\right) dV \qquad (1.117)$$

или, принимая во внимание (1.115'), имеем

$$\oint\limits_{S[V]} \frac{1}{\mu}\big(\mathbf{n}[\mathbf{A}'''\, [\nabla\, \mathbf{A}''']]\big) dS = \int\limits_V \frac{1}{\mu} [\nabla\, \mathbf{A}''']^2\, dV. \qquad (1.117')$$

Если из краевых условий следует, что

$$\oint\limits_{S[V]} \frac{1}{\mu}\big(\mathbf{n}[\mathbf{A}'''\, [\nabla\, \mathbf{A}''']]\big) dS = 0, \qquad (1.117')$$

то согласно (1.117') во всей области V

$$[\nabla\, \mathbf{A}'''] = 0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{rot} \mathbf{A}''' = 0, \qquad (1.119)$$

а это означает, что

$$\mathbf{A}''' = \operatorname{grad} T, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{A}'' = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} T, \qquad (1.119')$$

где $T = T(a)$ – произвольная скалярная функция точки a в области V. Если, кроме того, считать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A}''' = 0, \qquad (1.120)$$

то согласно $(1.119')_1$ $\nabla^2 T = 0$ и, следовательно, T – функция, гармоническая в области V.

Можно видеть, что левая часть (1.118) обращается в нуль, если функция $\mathbf{A}(a)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

$$[\mathbf{n}\,\mathbf{A}'''] = 0 \quad \text{на} \quad S[V], \tag{1.121}$$

$$[\mathbf{n}\,[\nabla\,\mathbf{A}''']\,] = 0 \quad \text{на} \quad S[V], \tag{1.122}$$

т. е. если на границе $S[V]$ области V полная тангенциальная компонента ($\mathbf{A}'''_\tau$ или $[\nabla\,\mathbf{A}''']_\tau$) вектора $\mathbf{A}'''$ или $[\nabla\,\mathbf{A}''']$ и, следовательно, компонента этого вектора по любому тангенциальному к поверхности $S[V]$ направлению t обращается в нуль. Действительно, вектор $[\mathbf{A}'''\,[\nabla\,\mathbf{A}''']\,]$ нормален к плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{A}'''$ и $[\nabla\,\mathbf{A}''']$, поэтому если один из этих векторов нормален к поверхности $S[V]$, то вектор $[\mathbf{A}'''\,[\nabla\,\mathbf{A}''']\,]$ лежит в плоскости, касательной к этой поверхности, т. е. его нормальная к этой поверхности компонента $[\mathbf{A}'''\,[\nabla\,\mathbf{A}''']\,]_n = (\mathbf{n}\,[\mathbf{A}'''\,[\nabla\,\mathbf{A}''']\,]) = 0$. Таким образом, если в любой точке поверхности $S[V]$ $[\mathbf{n}\,\mathbf{A}'''] = 0$ или $[\mathbf{n}\,[\nabla\,\mathbf{A}''']\,] = 0$, то подынтегральная функция в (1.118) обращается в нуль на всей этой поверхности.

Теперь представим себе, что из заданной физической ситуации мы для искомого потенциала $\mathbf{A}$ получили одно из следующих двух условий:

$$\text{IV.} \quad [\mathbf{n}\,\mathbf{A}(p)] = [\mathbf{n}\,\mathbf{N}(p)], \tag{1.121'}$$

$$\text{V.} \quad [\mathbf{n}\,[\nabla\,\mathbf{A}(p)]\,] = [\mathbf{n}\,\mathbf{P}(p)], \tag{1.122'}$$

(Условия I – III (для скалярного потенциала U) были получены в разделе I)

где p – точка на границе $S[V]$ области V; $\mathbf{N}(p)$ и $\mathbf{P}(p)$ – некоторые известные нам из физических условий задачи функции положения точки p на этой поверхности. Очевидно, что если функции $\mathbf{A}'(a)$ и $\mathbf{A}''(a)$ удовлетворяют условию (1.121') или (1.122'), то функция $\mathbf{A}'''(a)$ удовлетворяет соответственно условию (1.121) или (1.122). Ясно также, что если функции $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$ удовлетворяют требованию $\operatorname{div}\mathbf{A} = \beta(a)$, то $\operatorname{div}\mathbf{A}''' = 0$ и, следовательно, $\nabla^2 T = 0$.

Таким образом, если функции μ, $\mathbf{A}$, $[\nabla\,\mathbf{A}]$ непрерывны в области V, то любого из краевых условий (1.121'), (1.122') достаточно для обеспечения однозначности решения уравнения $(1.96)_2$ в этой области с точностью до градиента произвольной скалярной функции T, которая при заданной дивергенции вектора $\mathbf{A}$ должна быть гармонической ($\nabla^2 T = 0$).

Допустим теперь, что в области V имеются особые линии $l_{\text{ос}}$ и поверхности $S_{\text{ос}}$, на которых непрерывность функций $\mathbf{A}$, $[\nabla\,\mathbf{A}]$ и μ (хотя бы некоторых из них) нарушается. Тогда вместо (1.117') будем иметь равенство

$$\oint\limits_{S[V]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) + \oint\limits_{S[S_{\text{ос}}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) + \oint\limits_{S[l_{\text{ос}}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = \int\limits_V \frac{1}{\mu}[\nabla\,\mathbf{A}''']^2\,dV, \tag{1.117''}$$

аналогичное равенству (1.100''), и для обращения в нуль вектора $[\nabla\,\mathbf{A}''']$ потребуем, чтобы функция $\mathbf{A}'''$ удовлетворяла условиям

$$\oint\limits_{S[S_{\text{ос}}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = 0, \qquad \oint\limits_{S[l_{\text{ос}}]}(\mathbf{X}'''d\mathbf{S}) = 0, \tag{1.123}$$

которые соответствуют условиям (1.107). Первое из этих условий согласно (1.48') можно свести к условию

$$\operatorname{Div}\left[\mathbf{A}''' \frac{[\nabla \mathbf{A}''']}{\mu}\right] = 0 \quad \text{на} \quad S_{\text{ос}}. \qquad (1.123')$$

Полагая, что функции $\mathbf{A}$, $[\nabla \mathbf{A}]$, $1/\mu$ имеют на поверхности $S_{\text{ос}}$ ограниченные значения, заменим (1.123') условием

$$\left(\mathbf{n}\left[\mathbf{A}'''^{(2)} \frac{[\nabla \mathbf{A}'''^{(2)}]}{\mu_2}\right]\right) = \left(\mathbf{n}\left[\mathbf{A}'''^{(1)} \frac{[\nabla \mathbf{A}'''^{(1)}]}{\mu_1}\right]\right), \qquad (1.123'')$$

для выполнения которого достаточно удовлетворить совокупности условий

$$\left[\mathbf{n}\,\mathbf{A}'''^{(2)}\right] = \left[\mathbf{n}\,\mathbf{A}'''^{(1)}\right], \quad \frac{1}{\mu_2}\cdot\left[\mathbf{n}\left[\nabla \mathbf{A}'''^{(2)}\right]\right] = \frac{1}{\mu_1}\cdot\left[\mathbf{n}\left[\nabla \mathbf{A}'''^{(1)}\right]\right]. \qquad (1.124)$$

Переход от (1.123'') к (1.124) основан на том, что нормальная компонента векторного произведения двух векторов определяется их тангенциальными компонентами; от их нормальных компонент она не зависит.

Отсюда получаем для вектора $\mathbf{A}$ на поверхности $S_{\text{ос}}$ совокупность условий сопряжения:

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad \left[\mathbf{n}\left(\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(1)}\right)\right] = \left[\mathbf{n}\,\mathbf{N}_{12}(p)\right], \\ &2) \quad \frac{1}{\mu_2}\cdot\left[\mathbf{n}\left[\nabla \mathbf{A}^{(2)}\right]\right] - \frac{1}{\mu_1}\cdot\left[\mathbf{n}\left[\nabla \mathbf{A}^{(1)}\right]\right] = \mathbf{P}_{12}(p), \end{aligned}\right\} \qquad (1.124')$$

где p – любая точка на поверхности $S_{\text{ос}}$, а $\mathbf{N}_{12}(p)$ и $\mathbf{P}_{12}(p)$ – векторы, являющиеся заданными функциями положения точки p на этой поверхности. Обычно $\mathbf{N}_{12}(p) = 0$ и $\operatorname{Div}\mathbf{A} = 0$.

Из вывода достаточных условий сопряжения $(1.124')_{1,2}$ на поверхности $S_{\text{ос}}$ не следует их необходимость. Легко также видеть, что для единственности решения уравнения $(1.96)_2$ достаточно задать разрыв произведения $(1/\mu)\cdot(\mathbf{n}\,[\mathbf{A}[\nabla \mathbf{A}]])$ на $S_{\text{ос}}$ или интеграла этого произведения по $S_{\text{ос}}$. Аналогичное справедливо для уравнения $(1.96)_1$, условий $(1.110')_{1,2}$ и произведения $\Lambda\cdot U\cdot(\partial U/\partial n)$. Но условия (1.110') и (1.124') соответствуют обычно встречающимся случаям.

В следующих четырёх главах для разных видов ($\mathbf{f}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$,...) поля $\mathbf{M}$ будут получены условия на особой поверхности $S_{\text{ос}}$, необходимые в силу физических закономерностей этих полей. В § 8, § 6, § 7, § 5 соответственно глав второй, третьей, четвертой, пятой будут даны указания об использовании этих, необходимых по физической сути дела, условий в качестве условий, достаточных для единственности решений соответствующих уравнений.

Условие $(1.123)_2$, очевидно, удовлетворяется, если выражения для функций $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$ стремятся к совпадению при приближении точки наблюдения a к линии $l_{\text{ос}}$. Следовательно, в качестве условия для вектора $\mathbf{A}$ на такой линии достаточно задать выражения для вектора $\mathbf{A}$ у этой линии (задать «особенности» функции $\mathbf{A}$).

Таким образом, получаем *теорему единственности решения уравнения* $(1.96)_2$, согласно которой это решение определяется в области V с точностью до градиента произвольной скалярной функции T (гармонической, если задана дивергенция вектора $\mathbf{A}$) краевым условием IV-го или V-го типа на границе $S[V]$ области V, двумя условиями сопряжения (1.124') на любой особой поверхности $S_{\text{ос}}$ внутри области V и выражениями для вектора **A** у всех особых линий $l_{\text{ос}}$ в этой области.

IV. Замечания к теореме единственности решения уравнения векторного потенциала

Из замечаний, приведенных в разделе II, здесь уместны замечания 1, 4 – 8, 10 с подстановками **A**, $\mathbf{W}^v$, μ, $(1.96)_2$, (1.124'), (1.121') – (1,122') вместо U, w^v, Λ, $(1.96)_1$, (1.110'), (1.104') – (1.106'). К ним надо добавить следующие замечания.

1'. Если условие IV-го или V-го типа дополняется условием

$$A_n(p)=N_n(p) \text{ на } S[V], \tag{1.125}$$

где $N_n(p)$ – некоторая известная из физических условий задачи функция положения точки p на поверхности $S[V]$, то согласно (1.119') на ней производная $\partial T/\partial n=0$. Если, кроме того, задаётся дивергенция вектора **A** и, следовательно, имеем $\nabla^2 T=0$, то согласно замечанию 13 $T=C$, $\operatorname{grad} T=0$, $\mathbf{A}''=\mathbf{A}'$. Таким образом, сочетание условия IV-го или V-го типа с условиями (1.125) и выражением для: div **A** определяет потенциал **A** полностью.

2'. Сочетание условия IV-го типа с условием (1.125) равносильно краевому условию

$$\text{IVa.}\quad \mathbf{A}(p)=\mathbf{N}(p) \text{ на } S[V], \tag{1.125'}$$

где $\mathbf{N}(p)$ – некоторая функция точки p на поверхности $S[V]$.

3'. Если V – всё пространство, то условие IVa заменяется асимптотическим выражением для вектора **A**, соответствующим удалению точки наблюдения a на бесконечность.

Условия единственности решения прямой задачи электродинамики (теории переменного электромагнитного поля) будут рассмотрены в главе седьмой.

§ 9. ДОПОЛНЕНИЯ К ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

I. Производные поля, зависящего от расстояния L_{qa}

Часто приходится рассматривать поля скалярных или векторных величин $T(L_{qa})$, $\mathbf{M}(L_{qa})$, зависящих от расстояния $L_{qa}=L_{aq}=\sqrt{(x_a-x_q)^2+(y_a-y_q)^2+(z_a-z_q)^2}$ между двумя точками a и q, т. е. от абсолютной величины вектора $\mathbf{L}_{qa}=-\mathbf{L}_{aq}=\mathbf{1}_x\cdot(x_a-x_q)+\mathbf{1}_y\cdot(y_a-y_q)+\mathbf{1}_z\cdot(z_a-z_q)$. Такая величина T или **M** является функцией двух точек: a и q. В более общем случае величина T или **M** может зависеть, кроме того, от точки a или q (или от обеих точек) не через расстояние L_{qa}, например $T=T(q, L_{qa})$.

Дифференцируя функцию точек a и q, мы должны условиться, какую из них считаем переменной, указать, по какой из них мы дифференцируем. Эту точку называем аргументом функции, а другую – её параметром. Аргумент будем указывать буквой (a или q) над обозначением производной, например $\overset{a}{\operatorname{div}}\,\mathbf{A}(a, q)$ или $\overset{q}{\operatorname{grad}}\,T(a, q)$. Аналогичное касается функции координат ξ_{ka}, ξ_{kq}

точек a и q. Ниже следуют сведения о пространственных производных функций расстояния L_{qa}.

1. Направления векторов $\overset{a}{\operatorname{grad}} L_{qa} = \overset{a}{\nabla} L_{qa}$ и $\overset{q}{\operatorname{grad}} L_{qa} = \overset{q}{\nabla} L_{qa}$, очевидно, совпадают соответственно с направлениями векторов $\mathbf{L}_{qa}$ и $\mathbf{L}_{aq}$ так как при перемещении точки a расстояние L_{qa} увеличивается наиболее интенсивно, когда это перемещение происходит по направлению вектора $\mathbf{L}_{qa}$, а при перемещении точки q расстояние L_{qa} увеличивается наиболее интенсивно, когда это перемещение происходит по направлению вектора $\mathbf{L}_{aq} = -\mathbf{L}_{qa}$. Абсолютная же величина каждого из векторов $\overset{a}{\nabla} L_{qa}$ и $\overset{q}{\nabla} L_{qa}$ равна единице, так как любому перемещению точки a по направлению вектора $\mathbf{L}_{qa}$ или точки q по направлению вектора $\mathbf{L}_{aq}$ соответствует такое же увеличение расстояния $L_{qa} = L_{aq}$. Таким образом,

$$\overset{a}{\nabla} L_{qa} = \frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}}, \quad \overset{q}{\nabla} L_{qa} = \frac{-\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}}, \quad \overset{q}{\nabla} L_{qa} = -\overset{a}{\nabla} L_{qa}. \tag{1.126}$$

Справедливость (1.126) легко проверить, подставив в (1.13) L_{qa} вместо T и выполнив дифференцирование по координатам точки a, а затем по координатам точки q.

2. Принимая во внимание (1.15'), имеем из (1.126) для функции $T(L_{qa})$:

$$\overset{a}{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial L_{qa}} \overset{a}{\nabla} L_{qa} = \frac{\partial T}{\partial L_{qa}} \frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}}, \quad \overset{q}{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial L_{qa}} \frac{\mathbf{L}_{aq}}{L_{aq}}, \quad \overset{q}{\nabla} T = -\overset{a}{\nabla} T \tag{1.126'}$$

и, в частности,

$$\overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} = -\frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad \overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} = \frac{\mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3}. \tag{1.127}$$

Но для функций $T(q, L_{qa})$, $T(a, L_{qa})$, $T(a, q, L_{qa})$, которые зависят не только от расстояния L_{qa}, формулы (1.126') в общем случае несправедливы.

3. Определение дивергенции вектора $\operatorname{grad} L_{qa}^{-1}$, т. е. лапласиана $\nabla^2 L_{qa}^{-1}$. Дифференцировать будем по точке a, но индексы a для упрощения письма опустим. По формулам (1.64) и (1.33) имеем

$$\nabla^2 \frac{1}{L_{qa}} = \operatorname{div}\operatorname{grad} \frac{1}{L_{qa}} = \left(\nabla\left(\nabla \frac{1}{L_{qa}}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla_x \frac{1}{L_{qa}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla_y \frac{1}{L_{qa}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_z \frac{1}{L_{qa}}\right).$$

Но согласно (1.127) $\nabla_x L_{qa}^{-1} = (x_a - x_q) L_{qa}^{-3}$ и, следовательно,

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nabla_x L_{qa}^{-1}\right) = \left[L_{qa}^2 - 3\left(x_a - x_q\right)^2\right]$. Поэтому при $L_{qa} > 0$

$$\nabla^2 \frac{1}{L_{qa}} = 3 L_{qa}^{-5}\left[L_{qa}^2 - \left(x_a - x_q\right)^2 - \left(y_a - y_q\right)^2 - \left(z_a - z_q\right)^2\right] = 0. \tag{1.127'}$$

Такой же результат получился бы при дифференцировании по q.

4. Ротор от $\mathbf{L}_{qa}$ и градиент от скалярного произведения вектора $\mathbf{L}_{qa}$ на постоянный вектор **B**, т. е. на однородное (в окрестности точки, по которой берётся градиент) поле **B**.

Согласно (1.126') $\nabla L_{qa}^2 = 2L_{qa} \cdot \nabla L_{qa} = 2\mathbf{L}_{qa}$, следовательно, $\mathbf{L}_{qa} = (1/2) \cdot \nabla L_{qa}^2$. Поэтому в соответствии с (1.60)

$$\operatorname{rot} \mathbf{L}_{qa} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{grad} L_{qa}^2 = 0. \qquad (1.127'')$$

Взяв ось X по направлению поля **B**, имеем $(\mathbf{L}_{aq}\,\mathbf{B}) = L_{aq} \cdot B \cdot \cos(\mathbf{L}_{aq}, X) = B \cdot (x_q - x_a)$, следовательно,

$$\overset{q}{\nabla}\left(\mathbf{L}_{aq}\,\mathbf{B}\right) = B \cdot \overset{q}{\nabla}\left(x_q - x_a\right) = B \cdot \overset{q}{\nabla} x_q = B \cdot \mathbf{1}_x = \mathbf{B}. \qquad (1.127''')$$

5. В (1.23), (1.30), (1.36) и аналогичных им тождествах, полученных в § 3 и § 4, имеем производные rot **M**, div **M**, grad T и др. под знаками интегралов. Подразумевается дифференцирование и интегрирование по одному и тому же аргументу. За выполнением этого условия справедливости тождеств надо следить в случае функции (**M** или T) нескольких переменных и, в частности, функции точек a и q, определяющих вектор $\mathbf{L}_{qa}$.

II. Угол видимости

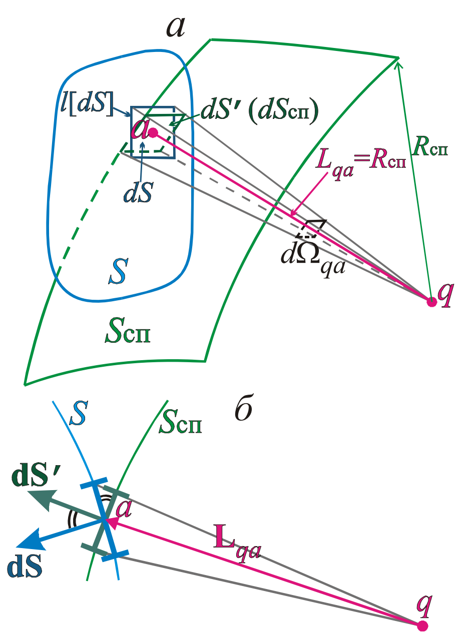


Рис. 1.15.
Угол видимости элемента **dS** с центром в точке a из точки q.
Площадка dS и её проекция dS' на $S_{\text{СП}}$, видимые под одним и тем же углом из точки q (a); разрез через L_{qa}, нормальный к линии пересечения площадок dS и dS' (*б*)

Телесным углом Ω при вершине конуса определяется ограничиваемая его поверхностью часть пространства.

Говоря о конусе или его поверхности, будем иметь в виду только одну из его полостей или её границу.

Конические поверхности с общей вершиной в точке q делят пространство пропорционально площадям $S_{\text{СП}}$ вырезаемых ими участков сферической поверхности (СП) произвольного радиуса $R_{\text{СП}}$ с центром в точке q (рис. 1.15). Эти площади при заданном радиусе $R_{\text{СП}}$ являются мерой телесных углов, соответствующих различным конусам. Но, применяя различные радиусы $R_{\text{СП}}$, мы для одного и того же конуса получаем различные площади $S_{\text{СП}}$, пропорциональные квадратам этих радиусов, поэтому телесные углы определяют отношениями площадей $S_{\text{СП}}$ к квадрату радиуса, т. е. полагают $\Omega = S_{\text{СП}} / R_{\text{СП}}^2$.

Развернув поверхность конуса до плоскости, получаем угол $\Omega = 2\pi$, которому соответствует полупространство. Всему пространству соответствует телесный угол $\Omega = 4\pi$. Часть пространства внутри (ограниченного полуплоскостями) двугранного угла с плоским углом α при ребре образует конус, которому отвечает телесный угол $\Omega = 2\alpha$ при вершине, которой можем считать любую точку ребра.

Определим теперь *угол видимости* $d\omega$ ориентированной *площадки* $\mathbf{dS}$ из некоторой «точки зрения» q. Абсолютная величина $|d\omega|$ угла $d\omega$ равна телесному углу $d\Omega$ при вершине q конуса, образующие которого проходят через точку q и через контур $l[dS]$ площадки dS. Пусть a – центр площадки dS, а dS' – её проекция на сферическую поверхность с центром в точке q и с радиусом $R_{\text{СП}} = L_{qa}$.

Площадки dS и dS' являются сечениями одного и того же конуса с вершиной в точке q и, следовательно, им отвечает один и тот же телесный угол $d\Omega_{qa}$. Принимая во внимание, что $\mathbf{dS'} \| \mathbf{L}_{qa}$, а площадь $dS' = dS \cdot |\cos(\mathbf{dS}, \mathbf{dS'})|$, определим угол видимости ориентированной площадки $\mathbf{dS}$ из точки q выражением:

$$d\omega_{qa} = \frac{dS}{L_{qa}^2}\cos(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{qa}) = \frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3}. \qquad (1.128)$$

В отличие от (не отрицательного) телесного угла $d\Omega_{qa}$ угол видимости $d\omega_{qa}$ может принимать отрицательные значения. Знак $d\omega_{qa}$ – тот же, что знак $\cos(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{qa})$. Он отрицателен, когда угол $(\mathbf{dS}, \mathbf{L}_{qa})$ – тупой, или равен π (180°), т. е. когда к точке q обращена лицевая сторона площадки $\mathbf{dS}$ (рис. 1.3, 1.15, в.13 *а, б*).

Согласно (1.128) и (1.127) поверхность S видна из точки q под углом

$$\omega_{qa} = \int_S \frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3} = \int_S \left(\mathbf{dS}\,\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right) = \int_S \left(\mathbf{n}\,\overset{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right) dS, \qquad (1.128')$$

равным алгебраической сумме углов видимости частей поверхности S, обращенных к точке q разными сторонами этой поверхности. Понятно, что знаки этих углов и их суммы зависят от выбора ориентации нормали n к поверхности S.

В дальнейшем нам часто будет удобно считать a «точкой зрения», а q – центром площадки dS, угол видимости которой определяется. При этом вместо углов $d\omega_{qa}$, ω_{qa} будет идти речь об углах

$$d\omega_{aq} = \frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{aq})}{L_{aq}^3}, \qquad \omega_{aq} = \int_S d\omega_{aq} = \int_S \frac{(\mathbf{dS}\,\mathbf{L}_{aq})}{L_{aq}^3}. \qquad (1.128'')$$

Согласно (1.128') угол ω_{qa} есть поток вектора $\mathbf{L}_{qa} \cdot L_{qa}^{-3} = \overset{q}{\nabla} L_{qa}^{-1}$ (зависящего от точки a) через поверхность S, а в соответствии с (1.127') дивергенция этого вектора в любой точке a, не совпадающей с точкой q, равна нулю. Поэтому по теореме (1.30) угол $\omega_{qa} = 0$, если поверхность S замкнутая, а точка q находится вне области V, ограниченной поверхностью $S[V]$ (см. рис. В.14, *г*). Если же точка q находится внутри замкнутой поверхности $S[V]$, то она окружает точку q со всех сторон и модуль угла её видимости из точки q, очевидно, равен площади сферической поверхности любого радиуса L_{qa}, делённой на L_{qa}^2, т. е. ($\omega_{qa} \pm 4\pi$, где знак минус соответствует случаю, когда (вопреки обычному) нормаль к поверхности $S[V]$ направлена внутрь (в область V).

Таким образом, обозначив через ω^i и ω^e углы, под которыми видна замкнутая поверхность из точек q, произвольно взятых внутри и вне ограниченной этой поверхностью области, имеем

$$\omega^e = 0, \quad \omega^i = \pm 4\pi, \quad \omega^{ie} = \pm 2\pi. \tag{1.129}$$

Угол ω^{ie} соответствует промежуточному случаю, когда точка q находится на замкнутой поверхности S. В этом случае плоский элемент dS, содержащий эту точку, виден из неё под нулевым углом, а угол видимости остальной части поверхности S содержит половину пространства.

Формулы (1.129) справедливы также для поверхности, замкнутость которой нарушается бесконечно далёким окном, видным под бесконечно малым углом из конечных точек пространства. Примером такой почти замкнутой поверхности является неограниченная цилиндрическая поверхность с замкнутой направляющей и с конечной площадью поперечного сечения.

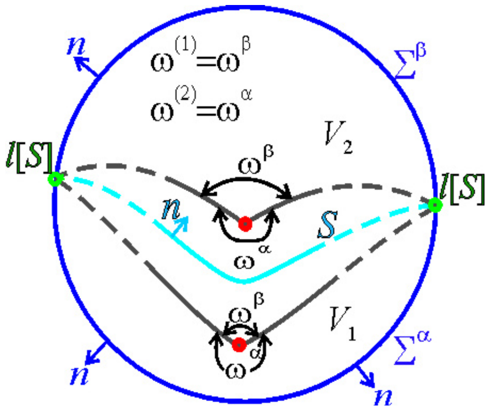


Рис. 1.16.
Угол видимости поверхности S, простирающейся до бесконечности

Угол видимости ω замкнутой или почти замкнутой поверхности S из точки q не меняется при перемещении этой точки в пределах какой-либо одной из двух областей V_i и V_e, разделяемых поверхностью S; на ней ω терпит разрыв, равный $\pm 4\pi$.

Сказанное о замкнутой поверхности справедливо также для более общего случая неограниченной поверхности S. Бесконечно удалённый контур такой поверхности делит бесконечно удалённую поверхность Σ (с наружной нормалью) на части Σ_α и Σ_β, принадлежащие областям V_1 и V_2, разделяемым поверхностью S (рис. 1.16). Поверхности Σ_α и Σ_β видны отовсюду под углами ω^α и ω^β (не зависящими от положения «точки зрения»). Эти углы и углы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, под которыми видна поверхность S из областей V_1 и V_2, связаны соотношениями $\omega^{(1)} + \omega^\alpha = 4\pi$, $-\omega^{(2)} + \omega^\beta = 4\pi$. Но $\omega^\alpha + \omega^\beta = 4\pi$, следовательно,

$$\omega^{(1)} = 4\pi - \omega^\alpha = \omega^\beta, \quad \omega^{(2)} = \omega^\beta - 4\pi = -\omega^\alpha. \tag{1.129'}$$

Если S – неограниченная плоскость, то

$$\omega^\alpha = \omega^\beta = 2\pi\,, \quad \omega^{(1)} = 2\pi\,, \quad \omega^{(2)} = -2\pi\,. \tag{1.129''}$$

Рассмотрим поведение угла видимости поверхности S из точки a при приближении этой точки к поверхности S. Предварительно разберём случай, когда эта поверхность представляет собой ограниченный контуром l участок плоскости Π, разделяющей полупространства V_1 и V_2. Пусть p – точка на плоскости Π, расположенная внутри контура l. Возьмём точку a на нормали к плоскости Π, проходящей через точку p, на расстоянии L_{ap} от неё. При расстоянии L_{ap}, достаточно малом сравнительно с наименьшим расстоянием L_{al} от точки a до контура l, коническая поверхность с центром в точке a и направляющей l оказывается почти плоской. Угол ω при её вершине приближается к 2π, если точка a находится в области V_1, и к -2π, если она находится в области V_2. Таким образом, отмечая индексами 1 и 2 обозначения, относящиеся к областям V_1 и V_2, имеем

$$\omega^{(1)}(a)\approx 2\pi, \quad \omega^{(2)}(a)\approx -2\pi, \quad \text{при } L_{ap} \ll L_{al}. \tag{1.130}$$

Для точки, почти совпадающей с точкой p, но находящейся на стороне S_1 или S_2 поверхности S (и принадлежащей области V_1 или V_2, см. рис. В.14, *а*), знак приближенного равенства в (1.130) заменяется знаком равенства, а в точке p самой поверхности S угол ω обращается в нуль, так как из всякой точки плоскости любая часть этой плоскости видна под нулевым углом. Следовательно,

$$\omega^{(1)}(p)=2\pi, \quad \omega(p)=0, \quad \omega^{(2)}(p)=-2\pi. \tag{1.130'}$$

Формулы (1.130') справедливы при любых размерах участка S плоскости Π и остаются справедливыми и для элементарной площадки dS^p со средней точкой p.

В случае поверхности S произвольной формы выделим из неё элементарную площадку dS^p со средней точкой p, вблизи которой мы определяем поведение угла видимости поверхности S (см. рис. В.14, *б*). Обозначим через S^* остальную часть этой поверхности (без площадки dS^p) и представим угол видимости поверхности S из произвольно взятой точки a в виде суммы двух углов

$$\omega(a)=\omega^*(a)+\omega^p(a), \tag{1.131}$$

из которых $\omega^p(a)$ – угол видимости площадки dS^p, а $\omega^*(a)$ – угол видимости поверхности S^*. Очевидно, что угол $\omega^*(a)$ при прохождении точки a через точку p не терпит разрыва, так как точка p не находится на S^*: $\omega^{*(2)}(p)=\omega^{*(1)}(p)=\omega^*(p)$. Что же касается угла ω^p, то согласно (1.130') $\omega^{p(1)}(p)=2\pi$, $\omega^{p(2)}(p)=-2\pi$, $\omega(p)=0$. Таким образом,

$$\omega^{(1)}(p)=\omega^*(p)+2\pi, \; \omega^{(2)}(p)=\omega^*(p)-2\pi, \; \omega(p)=\omega^*(p), \; \omega^{(2)}(p)-\omega^{(1)}(p)=-4\pi. \tag{1.132}$$

Допустим, что на один контур (замкнутую линию) l опираются две поверхности: S' и S'' с нормалями n' и n'', направленными от S' к S'', и пусть, ω' и ω'' – углы видимости этих поверхностей из точки a. Совокупность поверхностей S' и S'' образует замкнутую поверхность, следовательно, согласно (1.129), если точка a находится в промежутке ΔV между поверхностями S' и S'', то мы должны иметь $-\omega'+\omega''=4\pi$, а если эта точка находится вне этого промежутка, то $-\omega'+\omega''=0$. Знак минус при ω' получается потому, что при включении поверхности S' в состав замкнутой поверхности, к которой применяемся формула (1.129), мы должны изменить ориентацию нормали n' для того, чтобы она стала наружной (относительно области ΔV). Таким образом,

$$\omega''=\omega'\pm 4\pi \;\; \text{в области } \Delta V, \quad \omega''=\omega' \;\; \text{вне области } \Delta V. \tag{1.132'}$$

Знак минус соответствует случаю, когда нормали n' и n'' направлены от S'' к S'. Из сказанного выше можно сделать два вывода.

1. Опирающиеся на контур $l[S]$ поверхности S, нормали n к которым одинаково согласованы с обходом по этому контуру, видны из точки, не лежащей между ними, под одним и тем же углом, а из точки, лежащей между ними, под углами, отличающимися на 4π. Иначе говоря, угол видимости поверхности S определяется (с точностью до 4π) направлением её нормали n и краем (контуром $l[S]$).

2. Если опирающуюся на фиксированный контур $l[S]$ поверхность S перемещать (меняя её форму и размеры) как угодно, то углы видимости её из всех точек пространства при этом будут оставаться без всяких изменений, за тем лишь исключением, что в результате перехода поверхности S через какую-либо область, пространства ΔV углы видимости поверхности S из всех точек этой области изменятся на $\pm 4\pi$.

III. Симметрия поля

Рассмотрим симметрию поля трёх видов: зеркальную, цилиндрическую (осевую) и сферическую (центральную).

1. *Зеркальная симметрия.* Пусть q' и q'' – какие-либо две точки, симметричные относительно некоторой плоскости Π. Тогда будем считать зеркально симметричным относительно этой плоскости скалярное поле T, удовлетворяющее условию

$$T(q'') = \pm T(q'),$$

и векторное поле **M** (рис. 1.17), удовлетворяющее условию

$$M_t(q'') = \pm M_t(q'), \quad M_n(q'') = \mp M_n(q'),$$

в котором M_n и M_t – компоненты вектора **M**: нормальная M_n и любая тангенциальная M_t к плоскости Π. Плоскость Π называют плоскостью зеркальной симметрии поля.

Будем часто говорить короче: Π – плоскость симметрии. Аналогично будем говорить ось или центр симметрии, имея в виду цилиндрическую или сферическую симметрию.

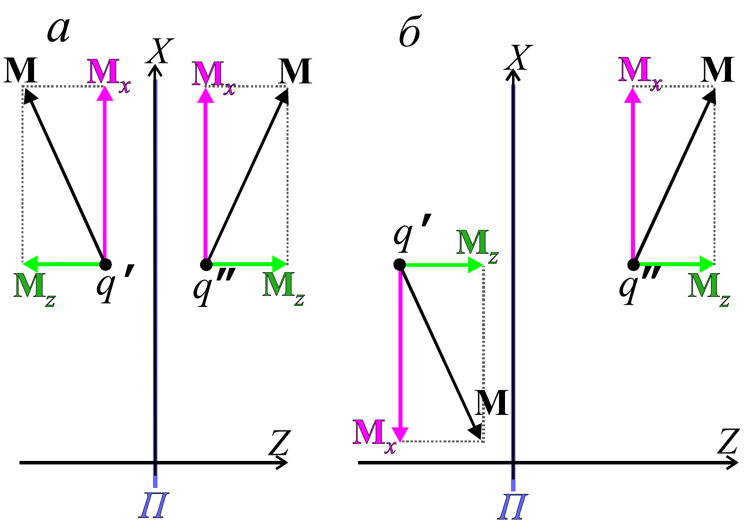


Рис. 1.17.
Зеркальная симметрия векторного поля: чётная (*а*); нечётная (*б*). Оси X и Z взяты соответственно по направлениям t и n

Чётной является зеркальная симметрия, если указанные условия выполняются при верхних знаках, и нечётной – если они выполняются при нижних знаках. Нечётная симметрия получается из чётной симметрии обращением знака скаляра T и направления вектора **M** в одной из каждых двух симметричных точек.

Из сказанного следует, что плоскость чётной симметрии поля **M** является плоскостью чётной симметрии поля компоненты M_t и нечётной симметрии поля M_n, а плоскость нечётной симметрии поля **M** является плоскостью нечётной симметрии поля M_t и чётной симметрии поля M_n.

Если плоскость симметрии Π скаляра T совпадает с плоскостью $z=0$ систем x, y, z и r, φ, z, а нормаль n к Π направлена по оси Z ($\mathbf{n}=\mathbf{1}_z$), то либо $T=f(|z|)$, т. е. $T(-z)=T(+z)$, откуда в плоскости Π $T^{(2)}(0)-T^{(1)}(0)=0$, либо $T(-z)=-T(+z)$, откуда $T^{(2)}(0)-T^{(1)}(0)=2\cdot T^{(2)}(0)$. В первом случае симметрия – чётная и скаляр T на плоскости Π непрерывен или обращается в бесконечность (одинаково с обеих сторон этой плоскости). Во втором случае симметрия – нечётная и скаляр T на плоскости Π терпит разрыв, равный $2\cdot T^{(2)}(0)$, или обращается в нуль.

Сказанное о зеркальной симметрии поля T можно применить к компонентам M_n и M_t зеркально симметричного векторного поля **M**. В частности, компонента M_t на плоскости нечётной симметрии поля **M** и компонента M_n на плоскости его чётной симметрии должны быть равны нулю, если они на ней непрерывны.

2. *Цилиндрическая симметрия.* Если скаляр T имеет одинаковые значения во всех точках любой окружности с осью по некоторой прямой L, то поле T цилиндрически симметрично относительно оси L (ось симметрии). Если поле T симметрично относительно оси Z системы r, φ, z или полярной оси системы R, θ, φ, то частная производная $(\partial T/\partial\varphi)=0$, $T=T(r,z)$ или $T=T(R,\theta)$. Для симметрии поля T относительно прямой L необходима и достаточна его чётная симметрия относительно любой плоскости, проходящей через эту прямую. Из этого следует, что на оси симметрии скаляр T непрерывен или принимает, бесконечно большие значения. Поле T, нечётно симметричное относительно

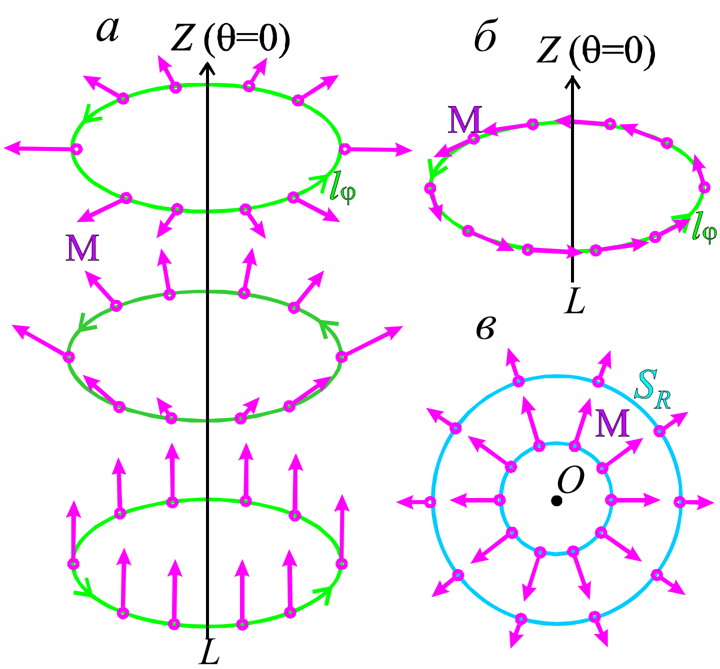


Рис. 1.18.
Примеры симметрии векторных полей: цилиндрической: чётной (*а*), нечётной (*б*); сферической (*в*)

любой плоскости, проходящей через прямую L, равно нулю. Поэтому цилиндрическая симметрия ненулевого поля T может быть только чётной.

Если векторное поле $\mathbf{M}$ чётно или нечётно симметрично относительно любой плоскости, проходящей через прямую L, то это поле является соответственно чётно или нечётно симметричным относительно оси L (рис. 1.18, *а*, *б*).

Если ось Z системы r, φ, z или полярная ось системы R, θ, φ является осью *чётной* симметрии поля $\mathbf{M}$, то

$$M_\varphi = 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{1}_r \cdot M_r(r, z) + \mathbf{1}_z \cdot M_z(r, z) \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = \mathbf{1}_R \cdot M_R(R, \theta) + \mathbf{1}_\theta \cdot M_\theta(R, \theta).$$

Если симметрия поля $\mathbf{M}$ относительно оси Z или полярной оси *нечётная*, то

$$M_r = 0, \ M_z = 0, \ \mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi \cdot M_\varphi(r, z) \quad \text{или} \quad M_R = 0, \ M_\theta = 0, \ \mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi \cdot M_\varphi(R, \theta).$$

3. *Сферическая симметрия.* Скалярное поле T сферически симметрично относительно точки O (центр симметрии), если величина T имеет одинаковые значения во всех точках любой сферической поверхности с центром в этой точке. Взяв эту точку в качестве начала координат системы R, θ, φ, имеем $(\partial T/\partial\theta) = (\partial T/\partial\varphi) = 0$, $T = T(R)$. Для симметрии поля T относительно точки O необходима его симметрия относительно, любой прямой, проходящей через эту точку, а также его чётная симметрия относительно любой проходящей через неё плоскости. Каждое из этих условий достаточно для сферической симметрии поля. Из сказанного следует, что в центре симметрии скаляр T непрерывен или обращается в бесконечность.

Если векторное поле $\mathbf{M}$ чётно симметрично относительно любой плоскости (любой оси), проходящей через точку O, то оно сферически симметрично относительно этой точки. Взяв центр симметрии O поля $\mathbf{M}$ (рис. 1.18, *в*) в качестве начала координат системы R, θ, φ, имеем:

$$M_\theta = 0, \quad M_\varphi = 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{1}_R \cdot M_R(R).$$

Удовлетворяющее этим условиям поле $\mathbf{M}$ – чётно симметрично относительно любой, проходящей через точку O, плоскости. Формально условиям нечётной сферической симметрии векторного поля удовлетворяет лишь поле $\mathbf{M}$ всюду равное нулю.

IV. О дифференцировании ортов и векторных компонент

В криволинейных системах координат направления ортов $\mathbf{1}_k$ ($k = 1, 2, 3$) в какой-либо точке в общем случае зависят от координат этой точки. В системах x, y, z; r, φ, z; R, θ, φ направления ортов $\mathbf{1}_R$ и $\mathbf{1}_\theta$ зависят от координат θ и φ, направления ортов $\mathbf{1}_r$ и $\mathbf{1}_\varphi$ зависят от координаты φ, а орты $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ имеют всюду одинаковые направления (см. рис. В.8 – В.10).

Неоднородность полей векторов $\mathbf{1}_k$ и зависимость направлений векторных компонент $\mathbf{M}_k = \mathbf{1}_k \cdot M_k$ от координат следует учитывать при выполнении операций над векторными компонентами поля $\mathbf{M}$. Например, производная векторной компоненты $\mathbf{M}_k$ по координате ξ_i ($i = 1, 2, 3$), в соответствии с общеизвестным правилом дифференцирования произведения $((U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U)$,

$$\frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial \xi_i} = \frac{\partial(\mathbf{1}_k \cdot M_k)}{\partial \xi_i} = \mathbf{1}_k \cdot \frac{\partial M_k}{\partial \xi_i} + M_k \cdot \frac{\partial \mathbf{1}_k}{\partial \xi_i}.$$

В декартовых координатах $(\partial \mathbf{1}_x / \partial x) = (\partial \mathbf{1}_x / \partial y) = (\partial \mathbf{1}_y / \partial x) ... = 0$ и производные векторных компонент

$$\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} = \mathbf{1}_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} + M_x \cdot \frac{\partial \mathbf{1}_x}{\partial x} = \mathbf{1}_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} + 0 \text{ и т. д.},$$

то есть фактически при не зависящих от координат ортах $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ дифференцированию по координатам подлежат только скалярные компоненты.

Производные по r, z, R в цилиндрических и сферических координатах получаются так же, как в системе x, y, z вынесением орта за знак дифференцирования:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_R}{\partial R} = \mathbf{1}_R \cdot \frac{\partial M_R}{\partial R}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}_z}{\partial z^2} = \mathbf{1}_z \cdot \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}_\varphi}{\partial r} = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial r}, \ldots .$$

В иных случаях производные ортов по координатам не равны нулю. Тогда, например,

$$\frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{1}_r \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} + M_r \frac{\partial \mathbf{1}_r}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}_r}{\partial \varphi^2} = \mathbf{1}_r \frac{\partial^2 M_r}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial \mathbf{1}_r}{\partial \varphi} \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} + M_r \frac{\partial^2 \mathbf{1}_r}{\partial \varphi^2}.$$

В книге [Альпин, 1971] показано, что первые производные

$$\frac{\partial \mathbf{1}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{1}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{1}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{1}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{1}_R}{\partial \theta} = \mathbf{1}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{1}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{1}_R,$$

$$\frac{\partial \mathbf{1}_R}{\partial \varphi} = \mathbf{1}_\varphi \sin\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{1}_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{1}_\varphi \cos\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{1}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{1}_z}{\partial \varphi} = 0;$$

вторые производные

$$\frac{\partial^2 \mathbf{1}_r}{\partial \varphi^2} = -\mathbf{1}_r, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{1}_\varphi}{\partial \varphi^2} = -\mathbf{1}_\varphi, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{1}_R}{\partial \theta^2} = -\mathbf{1}_R, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{1}_\theta}{\partial \theta^2} = -\mathbf{1}_\theta,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{1}_R}{\partial \varphi^2} = -\sin\theta(\mathbf{1}_R \sin\theta + \mathbf{1}_\theta \cos\theta), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{1}_\theta}{\partial \varphi^2} = -\cos\theta(\mathbf{1}_R \sin\theta + \mathbf{1}_\theta \cos\theta),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{1}_R}{\partial \theta\, \partial \varphi} = \mathbf{1}_\varphi \cos\theta, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{1}_\theta}{\partial \theta\, \partial \varphi} = -\mathbf{1}_\varphi \sin\theta.$$

V. О применении оператора ∇

Во многих случаях формулы, полученные для обыкновенных векторов, остаются справедливыми при замене части этих векторов символами набла. Таким способом можно было бы получить формулу (1.74) из известной формулы $(\mathbf{N}\,[\mathbf{N}\,\mathbf{M}]) = 0$. Однако допустимость подстановки ∇ вместо обыкновенного вектора должна быть обоснована для каждой конкретной формулы. Выше были обоснованы формулы (1.74) и (1.80'). Можно также доказать справедливость формул

$$(\nabla\,[\mathbf{M}\,\mathbf{N}]) = (\mathbf{N}\,[\nabla\,\mathbf{M}]) - (\mathbf{M}\,[\nabla\,\mathbf{N}]), \qquad (1.133)$$

$$\nabla\,(\nabla T) = \nabla^2 T, \quad [\nabla\,(\nabla T)] = 0, \quad (\nabla\,[\nabla\,\mathbf{M}]) = 0, \qquad (1.134)$$

$$\nabla(\Lambda{\cdot}T) = \Lambda{\cdot}\nabla T + T{\cdot}\nabla\Lambda, \quad (\nabla\,(\Lambda{\cdot}\mathbf{M})) = \Lambda{\cdot}(\nabla\,\mathbf{M}) + (\mathbf{M}\,(\nabla\Lambda)), \qquad (1.134')$$

$$[\nabla\,(\Lambda{\cdot}\mathbf{M})] = \Lambda{\cdot}[\nabla\,\mathbf{M}] - [\mathbf{M}\,(\nabla\Lambda)]. \qquad (1.134'')$$

Но $(\mathbf{M}\,[\mathbf{N}\,\mathbf{M}]) = 0$, а произведение $(\mathbf{M}\,[\nabla\,\mathbf{M}])$ может отличаться от нуля. Таким образом, заменить в формуле $(\mathbf{M}\,[\mathbf{N}\,\mathbf{M}]) = 0$ второй вектор символом ∇ нельзя, а два первых вектора в ней же заменить символами ∇ согласно $(1.134)_3$ можно.

Формула

$$\int(\mathbf{M}(\nabla\,T))dV = \int(\nabla(\mathbf{M}\cdot T))dV - \int(\nabla\mathbf{M})\cdot T\,dV \qquad (1.135)$$

аналогична формуле интегрирования по частям $\int u\,dv = \int d\,(u{\cdot}v) - \int v\,du$. Но $\int d(u{\cdot}v) = u{\cdot}v + C$, а выполнить аналогично интегрирование в первом члене правой части (1.135), очевидно, нельзя, так как с выражением $\operatorname{div}(\mathbf{M}{\cdot}T)\,dV$ нельзя обращаться как с полным дифференциалом $d(u{\cdot}v)$.

Согласно (1.134''), (1.127'') и $(1.126')_1$ ротор сферически симметричного поля $T(L_{qa}){\cdot}\mathbf{L}_{qa}$ равен нулю:

$$\text{если } \mathbf{M} = T(L_{qa}){\cdot}\mathbf{L}_{qa}\,, \text{ то } \operatorname{rot}\mathbf{M} = 0 \quad (L_{qa} > 0). \qquad (1.136)$$

Действительно,

$$[\nabla\,\mathbf{M}] = T\cdot[\nabla\,\mathbf{L}_{qa}] - [\mathbf{L}_{qa}\,\nabla\,T] = \frac{\mp 1}{L_{qa}}\cdot\frac{\partial T}{\partial L_{qa}}\cdot[\mathbf{L}_{qa}\,\mathbf{L}_{qa}] = 0,$$

где верхний знак получается, когда переменной считается точка a.

VI. О фазе периодически меняющейся величины

Изучая явление, зависящее периодически от времени, мы за каждый период T прослеживаем серию состояний явления, которые называем его фазами. Наблюдая изменения лика Луны, мы говорим, что за (лунный) месяц Луна проходит через все свои фазы от новолуния до исчезновения лунного серпа в конце месяца. Положения моментов t наступления фаз определяются в периоде T промежутками времени t_a, отсчитываемыми от условного начала t_{a0} этого периода. Доли t_a/T периода T, соответствующие моментам наступления фаз, можно также называть фазами явления.

В аналогичном смысле будем говорить о состояниях и фазах скалярного поля $\beta(a, t)$, меняющегося во времени с периодом T. (Для определённости можно считать, что состояние величины $\beta(a, t)$ в момент t характеризуется совокупностью значений, принимаемых в этот момент ею и её производными по времени.) Состояние величины β зависит от относительного положения момента t на интервале $t_{a0} \le t \le T + t_{a0}$, т. е. от t_a/T, где $t_a = t - t_{a0}$. Значение t_{a0} может зависеть от a. Для общности введём в выражение для $\beta(a, t)$ множитель $\beta_0(a)$, не зависящий от времени. Иначе говоря, положим $\beta(a, t) = \beta_0(a){\cdot}R(a, t)$, где $R(a, t)$ – периодический множитель, зависящий от отношения t_a/T. Кроме того, возьмём в качестве аргумента функции R это отношение, умноженное на число

m, и будем подбирать m так, чтобы период аналитического выражения функции R оказался равным T.

Итак, имеем

$$\beta(a,t) = \beta_0(a)\cdot R(a,t), \quad R(a,t) = R\,((m/T)\cdot t_a), \quad t_a = t - t_{a0}, \quad t_{a0} = t_{a0}(a), \qquad (1.137)$$

$$R(a,\, t + n\cdot T) = R(a,t) \qquad (n - \text{целое число}). \qquad (1.138)$$

Аргумент $m\cdot t_a/T$ функции R будем называть *ф а з о й   в е л и ч и н ы* $\beta(a,t)$. Обозначая этот аргумент Φ, имеем

$$\beta(a,t) = \beta_0(a)\cdot R(\Phi), \quad \Phi = \Phi(a,t) = (m\cdot t/T) \pm \varphi(a), \qquad (1.139)$$

$$\text{где} \quad \varphi(a) = \mp\, m\cdot t_{a0}/T = \Phi(a, 0) \qquad (1.139')$$

– *н а ч а л ь н а я   ф а з а   ф у н к ц и и* $\beta(a,t)$. Выбор знака перед $\varphi(a)$ – условный.

Таким образом, фаза Φ величины $\beta(a,t)$ – это безразмерный аргумент периодического множителя $R(a,t)$, определяющий относительное положение момента t в периоде T и удовлетворяющий условию (1.138).

В качестве примера возьмём случай зависимости величины R от времени t по закону косинуса:

$$R(a,t) = \cos\frac{m t_a}{T} = \cos\left(\frac{mt}{T} - \frac{m t_{a0}}{T}\right). \qquad (1.139'')$$

Полагая для выполнения условия (1.138) $m = 2\pi$, получаем

$$R(a,t) = \cos\Phi\,, \quad \Phi = \frac{2\pi\, t}{T} \pm \varphi(a), \quad \varphi(a) = \mp\frac{2\pi\, t_{a0}}{T}, \qquad (1.140)$$

где угол Φ (в радианах) – фаза величины $\beta(a,t) = \beta_0(a)\cdot\cos\,[(2\pi t_a)/T]$, а угол φ – её начальная фаза.

Аналогичное сказанному о скаляре β справедливо для векторной величины $\mathbf{N}(a,t)$. Непосредственно применять сказанное выше можно к скалярным компонентам N_k векторной величины $\mathbf{N}$. При этом надо помнить, что t_{a0} может иметь для разных компонент N_k вектора $\mathbf{N}$ разные значения.

В случае периодической зависимости величины β от пространственной координаты ξ_k можно ввести понятие о фазе в геометрическом смысле. Вместо промежутка времени t_a можно взять расстояние по координатной линии l_k, а вместо периода T – длину волны λ (см. § 3 и § 6 главы шестой).

Список литературы

1. *Альпин Л. М.* Теория поля. М., Недра, 1966.

2. *Альпин Л. М.* Практические работы по теории поля. М., Недра, 1971.

3. *Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М., Недра, 1985.

4. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М., Высшая школа, 1976.

5. *Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л., Недра, 1972.

6. *Гурвич И. И., Боганик Г. Н.* Сейсмическая разведка. М., Недра, 1980.

7. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.

8. *Заборовский А. И.* Переменные электромагнитные поля в электроразведке. М., Изд-во МГУ, 1960.

9. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1949.

10. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Статические поля, стационарное электрическое поле. Учебное пособие (Практикум), 1983, 2007, 105 с. [Электронный ресурс]: 2014 г., http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2657 , а также WWW- ресурс.: http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf или http://www.geokniga.org/books/6823).

11. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебное пособие (Лекции). 2014 г. , 203 с. [Электронный ресурс].: http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656, а также WWW- ресурс: http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf или http://www.geokniga.org/books/6822.

12. *Каринский А. Д.* Теория поля. Дополнительные главы: учебное пособие для специализации "сейсморазведка" [Электронный ресурс].: http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=4823, а также WWW- ресурс: http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_uch_2018.pdf.

13. *Кауфман А. А.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. М.: Недра, 1997.

14. *Корн Г. и Корн Е.* Справочник по математике /изд. 2-е. М., Наука, 1970.

15. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Наука, 1965.

16. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М., Радио и связь, 1983.

17. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958.

18. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М., Наука, 1973.

19. *Овчинников И. К.* Теория поля. М., Недра, 1979.

20. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. М., Недра, 1972.

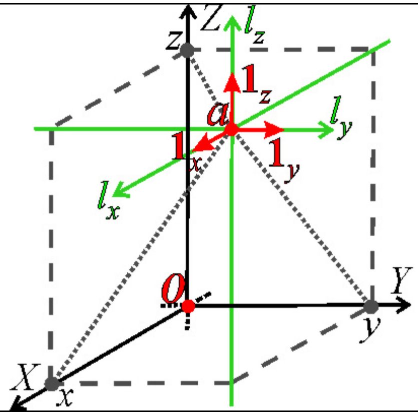
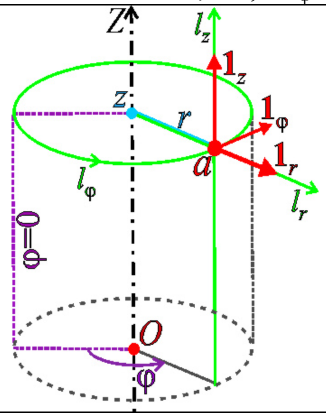
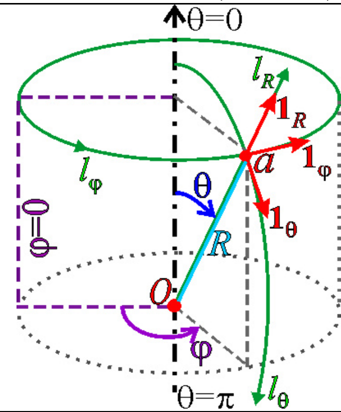
21. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М., Гостехиздат, 1946.

22. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.

23. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.

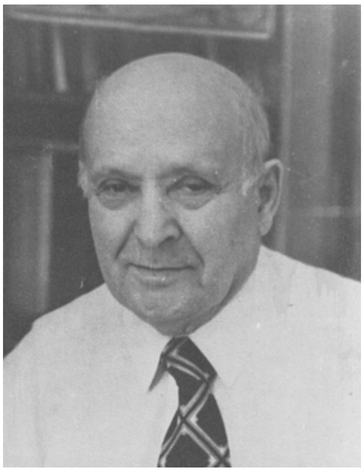
24. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.

Приложение. Пространственные производные в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

Декартовы координаты: $x,\ y,\ z$. Коэффициенты Ламэ: $h_x=1,\ h_y=1,\ h_z=1$.	Цилиндрические координаты: $r,\ \varphi,\ z$. Коэффициенты Ламэ: $h_r=1,\ h_\varphi=r,\ h_z=1$.	Сферические координаты: $R,\ \theta,\ \varphi$. Коэффициенты Ламэ: $h_R=1,\ h_\theta=R,\ h_\varphi=R\cdot\sin\theta$.
		
$\operatorname{grad} T=\nabla T=\mathbf{1}_x\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\mathbf{1}_y\cdot\frac{\partial T}{\partial y}+\mathbf{1}_z\cdot\frac{\partial T}{\partial z}$	$\operatorname{grad} T=\mathbf{1}_r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\mathbf{1}_\varphi}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\mathbf{1}_z\cdot\frac{\partial T}{\partial z}$	$\operatorname{grad} T=\mathbf{1}_R\cdot\frac{\partial T}{\partial R}+\frac{\mathbf{1}_\theta}{R}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{1}_\varphi}{R\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial T}{\partial\varphi}$
$\operatorname{div}\mathbf{M}=(\nabla\ \mathbf{M})=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}$	$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{r}\cdot\left[\frac{\partial(r\cdot M_r)}{\partial r}+\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}+r\cdot\frac{\partial M_z}{\partial z}\right]$	$\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{1}{R^2\cdot\sin\theta}\cdot\left[\sin\theta\cdot\frac{\partial(R^2\cdot M_R)}{\partial R}+\right.$ $\left.+R\cdot\frac{\partial(\sin\theta\cdot M_\theta)}{\partial\theta}+R\cdot\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}\right]$
$\operatorname{rot}\mathbf{M}=[\nabla\ \mathbf{M}]=\mathbf{1}_x\left[\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right]+$ $+\mathbf{1}_y\left[\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right]+\mathbf{1}_z\left[\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right]$	$\operatorname{rot}\mathbf{M}=\mathbf{1}_r\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial M_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial M_\varphi}{\partial z}\right]+$ $+\mathbf{1}_\varphi\left[\frac{\partial M_r}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial r}\right]+\mathbf{1}_z\left[\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial(r\cdot M_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial M_r}{\partial\varphi}\right)\right]$	$\operatorname{rot}\mathbf{M}=\frac{\mathbf{1}_R}{R\cdot\sin\theta}\cdot\left[\frac{\partial(\sin\theta\cdot M_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial M_\theta}{\partial\varphi}\right]+$ $+\frac{\mathbf{1}_\theta}{R}\cdot\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial M_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial(R\cdot M_\varphi)}{\partial R}\right]+\frac{\mathbf{1}_\varphi}{R}\cdot\left[\frac{\partial(R\cdot M_\theta)}{\partial R}-\frac{\partial M_R}{\partial\theta}\right]$
$\operatorname{div}\operatorname{grad} T=(\nabla\nabla T)=\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$\nabla^2 T=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$\nabla^2 T=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial T}{\partial R}\right)+$ $+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}$

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} T\equiv 0;\qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{M}\equiv 0;\qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M}-\nabla^2\mathbf{M}.$

Сведения об авторах

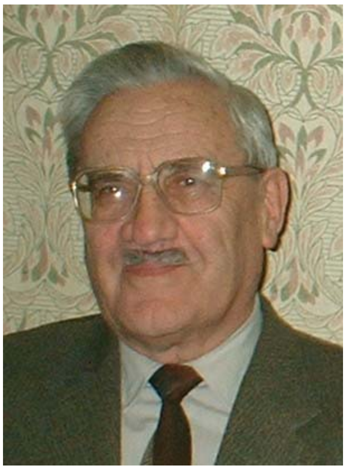


Лев Моисеевич Альпин

(1898 – 1986)

Родился в городе Кременчуге.

В 1930-ом году, окончил физико-математическое отделение МГУ. Доктор технических наук. В 1933-ом году начал заниматься преподавательской деятельностью во МГРИ, где прошёл путь от ассистента кафедры геофизики до профессора, заведующего кафедрой. Педагогическую деятельность сочетал с исследовательской работой во ВНИИГеофизике и других геофизических организациях. Под его влиянием сформировались как специалисты многие известные выпускники геофизического факультета МГРИ 30–х – 70–х годов.



Дмитрий Сергеевич Даев

Родился в 1927-ом году в городе Новосибирске.

В 1952–ом году окончил геофизический факультет МГРИ. Доктор технических наук. Заслуженный деятель науки и техники РФ. В 1952-1958 гг. работал во МГРИ инженером, ассистентом. С 1958-го по 1964-й год – зав. лабораторией электромагнитных полей института геологии и геофизики СО АН СССР. С 1965-го года – доцент, затем профессор МГРИ. С 1978-го года – зав. кафедрой электрических, гравитационных и магнитных методов геофизики МГРИ, а с 2003-го года по 2018-й год – профессор этой кафедры, затем – кафедры геофизики. В 1976-1977 гг. – эксперт ООН в Индии. В 1981-1983 гг. – эксперт ООН в странах Восточной Африки.

Александр Дмитриевич Каринский

Родился в 1949-ом году в городе Москве.

В 1971-ом году окончил геофизический факультет МГРИ. Доктор физико-математических наук. С 1971-го по 1999-й год работал во МГРИ в должностях младшего научного сотрудника, ассистента, старшего преподавателя, доцента, профессора. С 1999-го по 2002-й год работал научным сотрудником в Мексиканском институте нефти (IMP). С 2003-го по 2009-й год – зав. кафедрой электрических, гравитационных и магнитных методов геофизики МГРИ. В настоящее время – профессор кафедры геофизики теперь уже, к прискорбию, *не геофизического* факультета МГРИ.